

## Modelo analítico para se estimar o comprimento de pista necessário para a decolagem de uma aeronave destinada a participar da competição SAE-Aerodesign.

Luiz Eduardo Miranda José Rodrigues  
Professor MSc.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
[luizeduardo@cefetsp.br](mailto:luizeduardo@cefetsp.br)

### Resumo

O presente artigo possui como objetivo apresentar um modelo analítico para se estimar o comprimento de pista necessário para a decolagem de uma aeronave leve operando em regime subsônico de voo. O equacionamento proposto é fundamentado nas forças atuantes na aeronave durante a corrida de decolagem e tem como modelagem básica o princípio fundamental da dinâmica (2ª Lei de Newton da Física). Na análise das equações são avaliados os efeitos da altitude, do peso da aeronave e também é considerada a variação da tração disponível conforme a velocidade e a altitude aumentam.

### Palavras-chave

Desempenho, Decolagem, AeroDesign.

### 1 – Introdução

A análise do desempenho durante a corrida de decolagem de uma aeronave destinada a participar da competição AeroDesign representa um dos pontos mais importantes para o sucesso do projeto no quesito carga útil transportada, pois como o regulamento da competição restringe o comprimento de pista para a decolagem, a capacidade de decolar com o maior peso possível é diretamente afetada.

Dessa forma, o peso total de decolagem da aeronave torna-se máximo quando dentro de todas as restrições existentes no regulamento da competição a equipe conseguir um excelente projeto aerodinâmico e que propicie durante a corrida

de decolagem alcançar voo com a maior carga possível, portanto, uma polar de arrasto obtida com precisão propicia importantes melhoras no desempenho de decolagem, permitindo desse modo que se obtenha o maior peso total de decolagem para a aeronave em projeto.

### 2 – Modelo Matemático

O modelo matemático apresentado neste artigo é o mesmo que é utilizado para aviões convencionais com propulsão à hélice e possui sua formulação baseada no princípio fundamental da dinâmica (2ª lei de Newton), portanto:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Para a aplicação da Equação (1), é necessário que sejam conhecidas as forças que atuam na aeronave durante a corrida de decolagem. A Figura 1 mostra um avião monomotor durante a corrida de decolagem e as forças que atuam sobre ele.

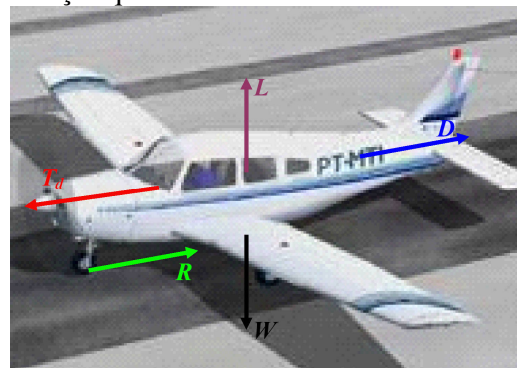


Figura 1 – Forças atuantes durante a decolagem, [4].

Pode-se perceber analisando-se a Figura 1, que além das quatro forças necessárias para o vôo reto e nivelado, também está presente durante a corrida de decolagem a força de atrito entre as rodas e o solo. Esta força é representada no presente artigo por  $R$ , e pode ser calculada da seguinte forma:

$$R = \mu \cdot N \quad (2)$$

$\mu$  representa o coeficiente de atrito entre as rodas da aeronave e o solo e  $N$  representa a força normal que diminui conforme a velocidade aumenta.

Segundo Roskam [5], o coeficiente de atrito pode variar desde 0,02 para pistas asfaltadas até 0,1 para pistas de grama. A Tabela 1 relaciona o coeficiente de atrito com o respectivo piso da pista.

Tabela 1 – Coeficiente de atrito entre o piso e as rodas.

Tipo do piso	$\mu$
asfalto, concreto	0,02 até 0,03
terra	0,05
grama curta	0,05
grama longa	0,10

Como comentado, durante a corrida de decolagem a força normal diminui conforme a velocidade da aeronave aumenta, esse fato está relacionado ao aumento da força de sustentação que ocorre conforme a aeronave ganha velocidade, portanto, a Equação (2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$R = \mu \cdot (W - L) \quad (3)$$

e o termo  $(W-L)$  representa a força normal atuante durante a corrida de decolagem.

Para a análise do desempenho de decolagem utilizando-se a Equação (1), a partir da Figura 1 é possível determinar a força resultante oriunda das soma das forças paralelas à direção de movimento da

aeronave, assim, a Equação (1) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$T - D - R = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

Para a solução da Equação (4) é muito importante que se determine uma condição que relacione a velocidade de decolagem, a massa e a força líquida atuante, fornecendo como resultado a distância necessária para a decolagem da aeronave, ou seja, é necessário se realizar uma mudança de variável de forma a tornar a Equação (4) independente do tempo.

Assim, assume-se que a aeronave inicia o seu movimento a partir do repouso na posição  $S=0m$  e no instante  $t=0s$  sendo acelerada até a velocidade de decolagem  $v_{lo}$  após percorrer a distância  $S_{lo}$  em um intervalo de tempo  $t$ , portanto, integrando-se ambos os termos da Equação (4) e isolando-se a variável  $t$ , pode-se escrever que:

$$\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

$$\int_0^t \frac{F}{m} \cdot dt = \int_0^v dv \quad (6)$$

$$t = \frac{v \cdot m}{F} \quad (7)$$

Lembrando-se que a partir das equações fundamentais da cinemática tem-se que a velocidade é dada por:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (8)$$

A integral da Equação (8) permite obter o comprimento de pista necessário para se decolar a aeronave, portanto:

$$v \cdot dt = ds \quad (9)$$

Considerando que a aeronave parte do repouso na posição  $S=0m$  e no instante  $t=0s$

sendo acelerada até a velocidade de decolagem  $v_{lo}$  na posição  $S_{lo}$  e no instante  $t$ , tem-se que:

$$\int_0^t v \cdot dt = \int_0^{S_{lo}} ds \quad (10)$$

Substituindo  $v$  pelo resultado da Equação (6), tem-se que:

$$\int_0^t \left( \frac{F}{m} \cdot t \right) \cdot dt = \int_0^{S_{lo}} ds \quad (11)$$

portanto:

$$\frac{F \cdot t^2}{2 \cdot m} = S_{Lo} \quad (12)$$

Substituindo-se a Equação (7) na Equação (12):

$$\frac{F \cdot \left( \frac{v \cdot m}{F} \right)^2}{2 \cdot m} = S_{Lo} \quad (13)$$

resultando em:

$$S_{Lo} = \frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot F} \quad (14)$$

Substituindo-se a soma das forças ( $T-D-R$ ) na Equação (14) pode-se escrever que:

$$S_{Lo} = \frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot (T - D - R)} \quad (15)$$

ou,

$$S_{Lo} = \frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot \{T - [D + \mu \cdot (W - L)]\}} \quad (16)$$

Considerando que no instante da decolagem  $v = v_{lo}$  e que a massa da aeronave é dada por  $m = W/g$ , a Equação (16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S_{Lo} = \frac{v_{lo}^2 \cdot W}{2 \cdot g \cdot \{T - [D + \mu \cdot (W - L)]\}} \quad (17)$$

Como forma de se manter uma margem de segurança durante o

procedimento de decolagem e subida, a norma FAR-Part 23 [3] (FAR – Federal Aviation Regulation) sugere que a velocidade de decolagem não deve ser inferior a 20% da velocidade de estol, ou seja,  $v_{lo} = 1,2 v_{estol}$ , portanto:

$$v_{lo} = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot W}{\rho \cdot S \cdot C_{Lmáx}}} \quad (18)$$

Assim, tem-se que:

$$S_{Lo} = \frac{1,44 \cdot W^2}{g \cdot \rho \cdot S \cdot C_{Lmáx} \cdot \{T - [D + \mu \cdot (W - L)]\}} \quad (19)$$

Como os valores da força de arrasto e da força de sustentação se alteram conforme a velocidade aumenta, o cálculo da Equação (19) se torna muito complexo e como forma de simplificar a solução, Anderson [1], [2], sugere que seja realizada uma aproximação para uma força requerida média obtida em 70% da velocidade de decolagem, ou seja, os valores de  $L$  e  $D$  são calculados a partir das Equações (20) e (21) considerando  $v = 0,7v_{lo}$ , portanto:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (0,7 \cdot v_{lo})^2 \cdot S \cdot C_L \quad (20)$$

e

$$D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (0,7 \cdot v_{lo})^2 \cdot S \cdot (C_{D0} + \phi \cdot K \cdot C_L^2) \quad (21)$$

É importante ressaltar que durante uma análise de decolagem, o coeficiente de sustentação  $C_L$  presente nas Equações (20) e (21) é constante durante toda a corrida de decolagem, e, para o propósito do AeroDesign é interessante que se utilize o  $C_L$  ideal, pois dessa forma a relação entre a geração da força de sustentação necessária para a decolagem e a força de arrasto será a maior possível garantindo uma redução no comprimento de pista necessário para se decolar a aeronave.

No instante em que a aeronave sai do solo, o ângulo de ataque aumenta de forma que a força de sustentação gerada se iguale ao peso, dessa forma, o  $C_L$  também aumenta para um valor um pouco abaixo do  $C_{Lmáx}$ . Nos instantes iniciais que sucedem a decolagem, como forma de se evitar o estol o piloto deve ser muito experiente, pois uma perda de sustentação a baixa altura praticamente inviabiliza uma recuperação do vôo ocasionando em queda da aeronave. A Figura 2 mostra a variação do coeficiente de sustentação em função do comprimento de pista necessário para decolar a aeronave.

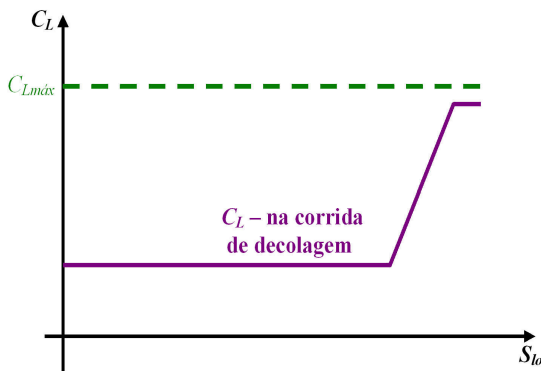


Figura 2 – Variação do  $C_L$  em função do comprimento de pista necessário para decolagem.

Com relação ao coeficiente de arrasto  $C_D = C_{D0} + \phi K C_L^2$  presente na Equação (21) é importante notar que a variável  $\phi$  representa o fator de efeito solo que atua nos procedimentos de decolagem e pouso sendo definido por:

$$\phi = \frac{(16 \cdot h/b)^2}{1 + (16 \cdot h/b)^2} \quad (22)$$

Em função das considerações realizadas, a Equação (19) utilizada para se estimar o comprimento de pista para a decolagem da aeronave pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S_{Lo} = \frac{1,44 \cdot W^2}{g \cdot \rho \cdot S \cdot C_{Lmáx} \cdot \{T - [D + \mu \cdot (W - L)]\}_{0,7v_{lo}}} \quad (23)$$

Alguns autores assumem que a tração disponível é constante durante a corrida de decolagem, no presente artigo define-se que a mesma varia com a velocidade como mostrado na Figura 3 para algumas hélices mais usuais do AeroDesign, a variável  $T$  presente na Equação (23) também tem seu valor em uma condição de  $v = 0,7v_{lo}$ .

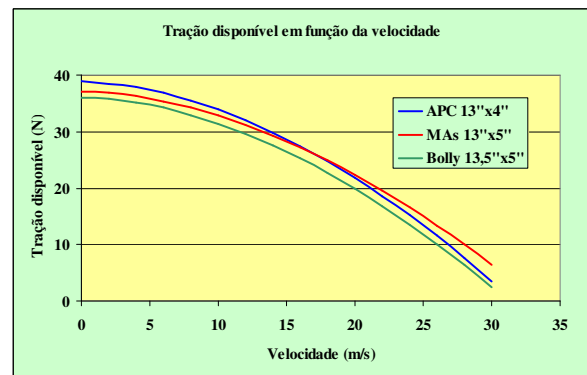


Figura 3 – Curvas de tração disponível de algumas hélices comerciais, [4].

### 3 – Coeficiente de Sustentação Ótimo para Decolagem

Com relação ao coeficiente de sustentação ideal para se realizar a corrida de decolagem com o menor comprimento de pista possível, é necessário que a aceleração seja realizada com a menor resistência ao avanço possível, dessa forma, um dos pontos fundamentais a serem avaliados durante a decolagem é justamente a determinação do coeficiente de sustentação que proporciona esta condição. Considerando na Equação (23) que a resistência ao avanço é dada por:

$$R = [D + \mu \cdot (W - L)]_{0,7v_{lo}} \quad (24)$$

lembrando que a pressão dinâmica na condição de decolagem é dada por:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (0,7 \cdot v_{LO}^2) \quad (25)$$

e que o coeficiente de arrasto é obtido pela polar de arrasto da aeronave considerando a influência do efeito solo pela seguinte equação:

$$C_D = C_{D0} + \phi \cdot K \cdot C_L^2 \quad (26)$$

Assim, a resistência total durante a corrida de decolagem é:

$$R = \left[ \begin{array}{l} q \cdot S \cdot (C_{D0} + \phi \cdot K \cdot C_L^2) \\ + \mu \cdot (W - q \cdot S \cdot C_L) \end{array} \right] \quad (27)$$

Como forma de se encontrar o coeficiente de sustentação que proporciona o mínimo comprimento de pista necessário para a decolagem, a Equação (27) deve ser derivada em relação à  $C_L$  e o seu resultado deve ser igual a zero, portanto:

$$\frac{dR}{dC_L} = 0 = \left[ \begin{array}{l} q \cdot S \cdot (C_{D0} + \phi \cdot K \cdot C_L^2) \\ + \mu \cdot (W - q \cdot S \cdot C_L) \end{array} \right] \quad (28)$$

Isolando-se  $C_L$  e utilizando o subscrito  $LO$  para identificar a decolagem, tem-se que:

$$C_{LLO} = \frac{\mu}{2 \cdot \phi \cdot K} \quad (29)$$

sabendo-se que:

$$K = \frac{1}{\pi \cdot e_0 \cdot AR} \quad (30)$$

tem-se que:

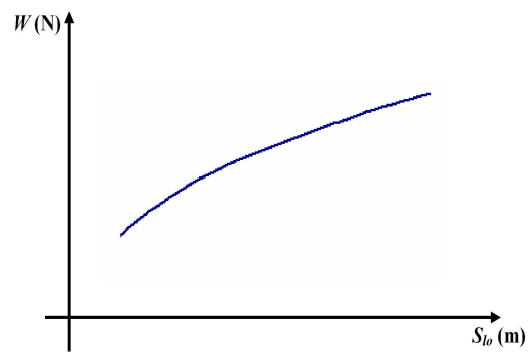
$$C_{LLO} = \frac{\pi \cdot e_0 \cdot AR \cdot \mu}{2 \cdot \phi} \quad (31)$$

A solução da Equação (31) fornece como resultado o valor do coeficiente de sustentação necessário para se garantir a decolagem com o menor comprimento de pista possível.

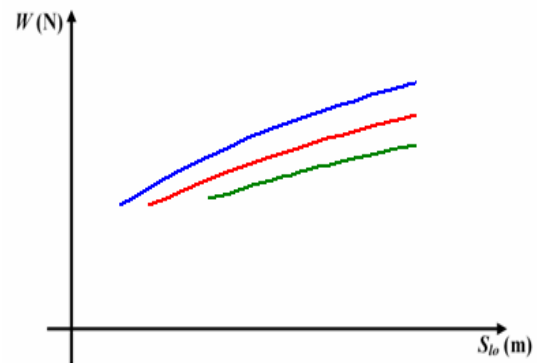
O resultado encontrado é de extrema importância e indica que para a asa dessa aeronave com perfil Eppler 423, a maior eficiência durante a corrida de decolagem é obtida para um ângulo de incidência da asa próximo de zero grau.

#### 4 – Gráfico do Peso Total de Decolagem em Função do Comprimento de Pista

Para a competição AeroDesign, é interessante que o peso total de decolagem seja mostrado em função do comprimento de pista necessário para decolar a aeronave em uma determinada condição de altitude em um gráfico cujo modelo genérico está apresentado na Figura 4a. Caso as condições de altitude sejam alteradas, a representação gráfica válida é a da Figura 4b.



4a



4b

Figura 4 – Variação do peso total de decolagem em função do comprimento de pista.

A análise deste gráfico é muito importante durante a competição, pois permite à equipe definir a partir da altitude densidade local no momento do voo qual será o peso máximo de decolagem para o comprimento de pista estipulado pelo regulamento.

A partir da Equação (23) é possível verificar que o comprimento de pista necessário para a decolagem é sensível as variáveis peso, densidade do ar, área da asa e  $C_{Lmáx}$ . Para aeronaves que participam da competição AeroDesign é de fundamental importância que a decolagem seja realizada com o maior peso possível no menor comprimento de pista, esta situação pode ser obtida a partir do aumento de área de asa, aumento da tração disponível através da escolha da melhor hélice ou então pelo aumento do  $C_{Lmáx}$  com a escolha do melhor perfil aerodinâmico para o projeto em questão.

Também é importante verificar que o aumento do peso provoca uma variação significativa no aumento da pista necessária para decolar, pois  $S_{lo}$  varia com  $W^2$ , e, dessa forma, ao se dobrar o peso por exemplo, o valor de  $S_{lo}$  é quadruplicado.

Com relação à variação da altitude, percebe-se na Equação (23) que a redução da densidade do ar provoca o aumento de  $S_{lo}$ , portanto, em aeroportos localizados em altitudes elevadas, a aeronave percorre um maior comprimento de pista durante a decolagem do que em aeroportos localizados ao nível do mar.

A Figura 6 mostra a aeronave Taperá 2009 durante o procedimento de decolagem.



Figura 6 – Procedimento de decolagem da aeronave Taperá.

## 5 – Aplicações e Resultados

Para aplicação numérica do modelo proposto, o presente artigo utiliza uma aeronave modelo com os seguintes parâmetros operacionais:  $W_{máx} = 144\text{N}$ ,  $\rho = 1,225\text{kg/m}^3$ ,  $g = 9,81\text{m/s}^2$ ,  $S = 0,9\text{m}^2$ ,  $\mu = 0,03$ ,  $C_{Lmáx} = 1,65$ ,  $b = 2,48\text{m}$ ,  $h = 0,35\text{m}$ , hélice APC 13"x4" e a polar de arrasto da aeronave dada por  $C_D = 0,022 + 0,065C_L^2$ .

Os cálculos foram implementados em uma planilha que permite a solução da Equação (23) para diversos valores de peso e altitude, fornecendo como resultado o comprimento de pista necessário para a decolagem da aeronave em diversas condições diferentes.

Considerando as características da aeronave modelo em estudo no presente artigo, as tabelas apresentadas mostram a relação entre o peso da aeronave e o comprimento de pista necessário para a

decolagem nas seguintes altitudes:  $h = 0m$ ,  $h = 1500m$  e  $h = 3000m$ . Foi adotado como referência um comprimento de pista máximo de 59m e uma variação do peso total de decolagem a partir de 70N em incrementos de 10N.

Tabela 2 - Decolagem ao nível do mar  
 $h = 0m$ .

W (N)	$S_{lo}$ (m)
70	11,856
80	15,835
90	20,502
100	25,901
110	32,087
120	39,122
130	47,046
140	55,945
143	58,813
<b>143,25</b>	<b>59,056</b>

Tabela 3 - Decolagem na altitude  $h = 1500m$ .

W (N)	$S_{lo}$ (m)
70	16,291
80	21,848
90	28,403
100	36,037
110	44,858
120	54,942
<b>123,7</b>	<b>59,022</b>

Tabela 4 - Decolagem na altitude  $h = 3000m$ .

W (N)	$S_{lo}$ (m)
70	22,736
80	30,646
90	40,064
100	51,124
<b>106,3</b>	<b>59,024</b>

O gráfico resultante da análise realizada com os respectivos comentários a respeito do modelo calculado está apresentado na Figura 7:

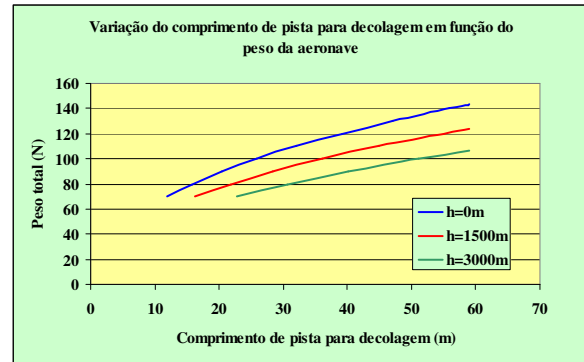


Figura 7 – Comprimento de pista necessário para a decolagem em função do peso total de decolagem e da variação da altitude da pista.

Na análise do gráfico é possível observar que para um determinado comprimento de pista, conforme a altitude aumenta, o peso total de decolagem se torna cada vez menor. Também é importante citar que para a competição AeroDesign considerando o critério de pista segmentada, o gráfico mostrado na Figura 7 pode ser dividido para condições de 1° e 2° setores para uma melhor visualização da equipe durante a competição.

## 6 – Conclusões

O presente artigo mostrou de forma simplificada uma metodologia para o cálculo do comprimento de pista necessário para a decolagem de uma aeronave com características próprias para participação na competição SAE-AeroDesign, como conclusões do trabalho podem ser citados os seguintes tópicos:

a) O comprimento de pista para a decolagem é diretamente afetado pelo aumento do peso da aeronave, com uma variação ao quadrado do peso, ou seja, duplicando-se o peso da aeronave quadruplica-se o comprimento de pista necessário para decolar o avião.

b) O comprimento de pista aumenta conforme a densidade do ar diminui, ou seja, quanto maior a altitude pior é a condição de decolagem, fazendo com que a aeronave percorra mais pista para conseguir alçar vôo.

c) Existe uma condição ótima de coeficiente de sustentação que permite uma decolagem com o menor comprimento de pista possível, esse coeficiente quando calculado permite que a equipe defina qual é o melhor ângulo para incidência da asa para fixação na fuselagem.

d) O desempenho durante a corrida de decolagem depende diretamente da tração líquida proporcionada pela hélice, portanto, uma hélice com elevada tração proporciona uma aceleração mais rápida da aeronave, permitindo que a velocidade de decolagem seja atingida com um menor comprimento de pista.

### 7 – Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, JOHN, D. *Aircraft performance and design*, McGraw-Hill, New York, 1999.
- [2] ANDERSON, JOHN, D. *Introduction to flight*, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [3] FEDERAL AVIATION REGULATIONS, Part 23 Airworthiness standarts: normal, utility, acrobatic, and commuter category airplanes, USA.
- [4] RODRIGUES. LEMJ, *Fundamentos de Engenharia Aeronáutica*, Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia de São Paulo, E-Book, São Paulo, 2009.
- [5] ROSKAM. JAN, *Airplane aerodynamics and performance*, DARcorporation, University of Kansas, 1997.