

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 8 – Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões

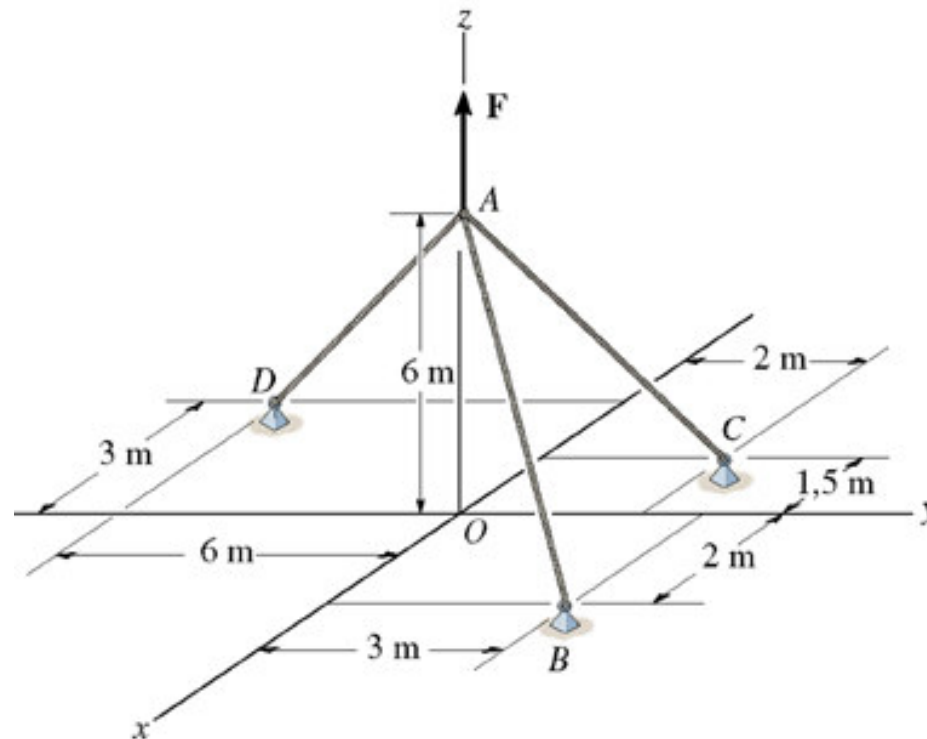
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Solução de Exercícios.
- Equilíbrio em Três Dimensões.

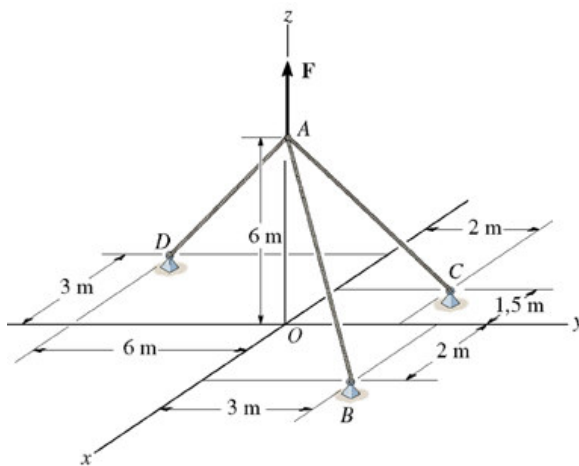
Exercício 1

- 1) Considere que o cabo **AB** esteja submetido a uma força de 700N. Determine as forças de tração nos cabos **AC** e **AD** e a intensidade da força vertical **F**.



Solução do Exercício 1

Determinação da Força em Cada Cabo:



$$A \quad (0, 0, 6)$$

$$B \quad (2, 3, 0)$$

$$C \quad (-1,5; 2; 0)$$

$$D \quad (-3, -6, 0)$$

Força F: $\vec{F} = (F\vec{k})$

Cabo AB:

Vetor posição:

$$\vec{r}_{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$r_{AB} = 7 \text{ m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0,286\vec{i} + 0,429\vec{j} - 0,857\vec{k}$$

Vetor Força AB:

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F}_{AB} = 700 \cdot (0,286\vec{i} + 0,429\vec{j} - 0,857\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AB} = (200\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k})\text{N}$$

Solução do Exercício 1

Cabo AC:

Vetor posição:

$$\vec{r}_{AC} = -1,5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{AC} = \sqrt{1,5^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$r_{AC} = 6,5 \text{ m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{-1,5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}}{6,5}$$

$$\vec{u}_{AC} = -0,230\vec{i} + 0,307\vec{j} - 0,923\vec{k}$$

Vetor Força AC:

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{u}_{AC}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot (-0,230\vec{i} + 0,307\vec{j} - 0,923\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AC} = (-0,230 \cdot F_{AC}\vec{i} + 0,307 \cdot F_{AC}\vec{j} - 0,923 \cdot F_{AC}\vec{k}) \text{ N}$$

Cabo AD:

Vetor posição:

$$\vec{r}_{AD} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{AD} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}$$

$$r_{AD} = 9 \text{ m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{-3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}}{9}$$

$$\vec{u}_{AD} = -0,333\vec{i} - 0,666\vec{j} - 0,666\vec{k}$$

Vetor Força AD:

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{u}_{AD}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot (-0,333\vec{i} - 0,666\vec{j} - 0,666\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AD} = (-0,333 \cdot F_{AD}\vec{i} - 0,666 \cdot F_{AD}\vec{j} - 0,666 \cdot F_{AD}\vec{k}) \text{ N}$$

Solução do Exercício 1

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AD} + \vec{F} = 0$$

$$200\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k} - 0,230 \cdot F_{AC}\vec{i} + 0,307 \cdot F_{AC}\vec{j} - 0,923 \cdot F_{AC}\vec{k} - 0,333 \cdot F_{AD}\vec{i} - 0,666 \cdot F_{AD}\vec{j} - 0,666 \cdot F_{AD}\vec{k} + F\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow \quad 200 - 0,230 \cdot F_{AC} - 0,333 \cdot F_{AD} = 0 \quad (\text{I})$$

$$\sum F_y = 0 \quad \longrightarrow \quad 300 + 0,307 \cdot F_{AC} - 0,666 \cdot F_{AD} = 0 \quad (\text{II})$$

$$\sum F_z = 0 \quad \longrightarrow \quad -600 - 0,923 \cdot F_{AC} - 0,666 \cdot F_{AD} + F = 0 \quad (\text{III})$$

Solução do Exercício 1

Solução das equações:

De (I):

$$F_{AD} = \frac{200 - 0,230 \cdot F_{AC}}{0,333}$$

$$F_{AD} = 600 - 0,690 \cdot F_{AC} \quad (\text{IV})$$

Substituindo (IV) em (II):

$$300 + 0,307 \cdot F_{AC} - (0,666 \cdot (600 - 0,690 \cdot F_{AC})) = 0$$

$$300 + 0,307 \cdot F_{AC} - 400 + 0,459 \cdot F_{AC} = 0$$

$$-100 + 0,766 \cdot F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = \frac{100}{0,766} \quad \longrightarrow \quad F_{AC} = 131,57 \text{ N}$$

Em (IV):

$$F_{AD} = 600 - 0,690 \cdot F_{AC}$$

$$F_{AD} = 600 - 0,690 \cdot 131,57$$

$$F_{AD} = 509,21 \text{ N}$$

Em (III):

$$-600 - 0,923 \cdot F_{AC} - 0,666 \cdot F_{AD} + F = 0$$

$$-600 - 0,923 \cdot 131,57 - 0,666 \cdot 509,21 + F = 0$$

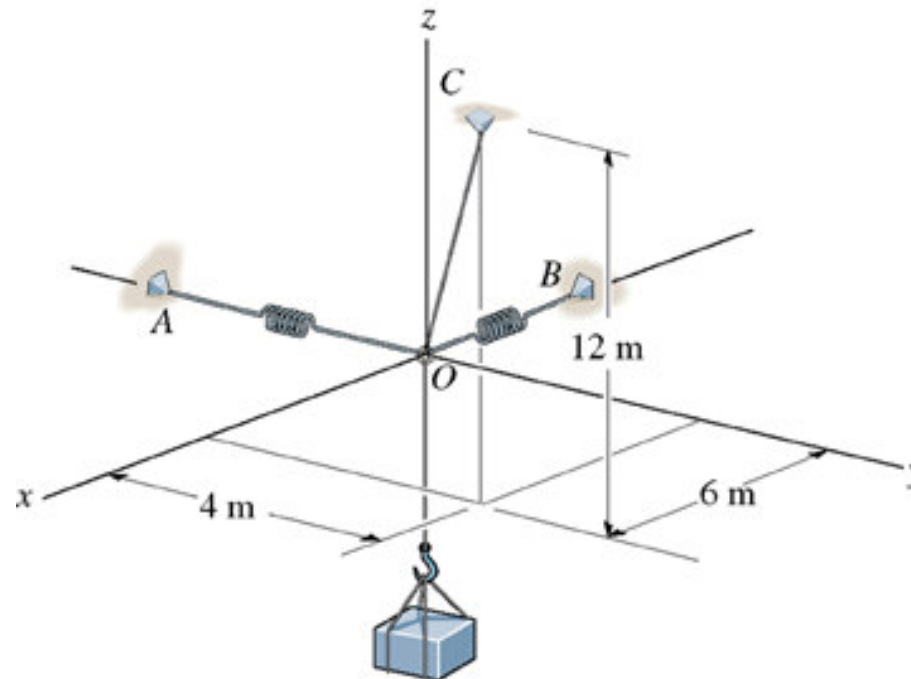
$$F = 600 + 0,923 \cdot 131,57 + 0,666 \cdot 509,21$$

$$F = 600 + 121,43 + 339,13$$

$$F = 1060,57 \text{ N}$$

Exercício 2

- 2) Determine a deformação necessária em cada mola para manter a caixa de 20kg na posição de equilíbrio. Cada mola tem comprimento de 2m sem deformação e rigidez $k = 300\text{N/m}$.



Solução do Exercício 2

Determinação das Forças :

Cabo OA:

$$\vec{F}_{OA} = -F_{OA} \vec{j} \text{ N}$$

Cabo OB:

$$\vec{F}_{OB} = -F_{OB} \vec{i} \text{ N}$$

Peso:

$$\vec{W} = (-20 \cdot 9,81 \vec{k})$$

$$\vec{W} = (-196,2 \vec{k}) \text{ N}$$

Cabo OC:

Vetor posição:

$$\vec{r}_{OC} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{OC} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} \quad \longrightarrow \quad r_{OC} = 14 \text{ m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{OC} = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{14}$$

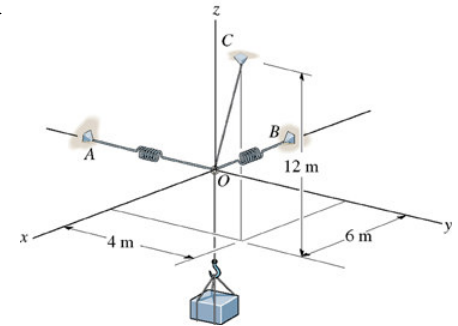
$$\vec{u}_{OC} = 0,428\vec{i} + 0,285\vec{j} + 0,857\vec{k}$$

Vetor Força OC:

$$\vec{F}_{OC} = F_{OC} \cdot \vec{u}_{OC}$$

$$\vec{F}_{OC} = F_{OC} \cdot (0,428\vec{i} + 0,285\vec{j} + 0,857\vec{k})$$

$$\vec{F}_{OC} = (0,428 \cdot F_{OC} \vec{i} + 0,285 \cdot F_{OC} \vec{j} + 0,857 \cdot F_{OC} \vec{k}) \text{ N}$$



Solução do Exercício 2

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{OA} + \vec{F}_{OB} + \vec{F}_{OC} + \vec{W} = 0$$

$$-F_{OA}\vec{j} - F_{OB}\vec{i} + 0,428 \cdot F_{OC}\vec{i} + 0,285 \cdot F_{OC}\vec{j} + 0,857 \cdot F_{OC}\vec{k} - 196,2\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow \quad -F_{OB} + 0,428 \cdot F_{OC} = 0 \quad (\text{I})$$

$$\sum F_y = 0 \quad \longrightarrow \quad -F_{OA} + 0,285 \cdot F_{OC} = 0 \quad (\text{II})$$

$$\sum F_z = 0 \quad \longrightarrow \quad 0,857 \cdot F_{OC} - 196,2 = 0 \quad (\text{III})$$

Solução do Exercício 2

Solução das equações:

De (III):

$$F_{OC} = \frac{196,2}{0,857}$$

$$F_{OC} = 228,93 \text{ N}$$

Em (II):

$$-F_{OA} + 0,285 \cdot 228,93 = 0$$

$$F_{OA} = 65,24 \text{ N}$$

Em (I):

$$-F_{OB} + 0,428 \cdot 228,93 = 0$$

$$F_{OB} = 97,98 \text{ N}$$

Deformação da Molas:

Mola OA:

$$F_{OA} = k \cdot s_{OA}$$

$$65,24 = 300 \cdot s_{OA}$$

$$s_{OA} = \frac{65,24}{300}$$

$$s_{OA} = 0,217 \text{ m}$$

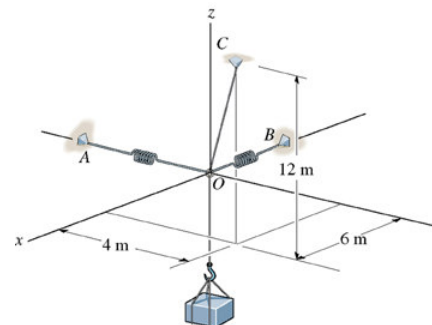
Mola OB:

$$F_{OB} = k \cdot s_{OB}$$

$$97,98 = 300 \cdot s_{OB}$$

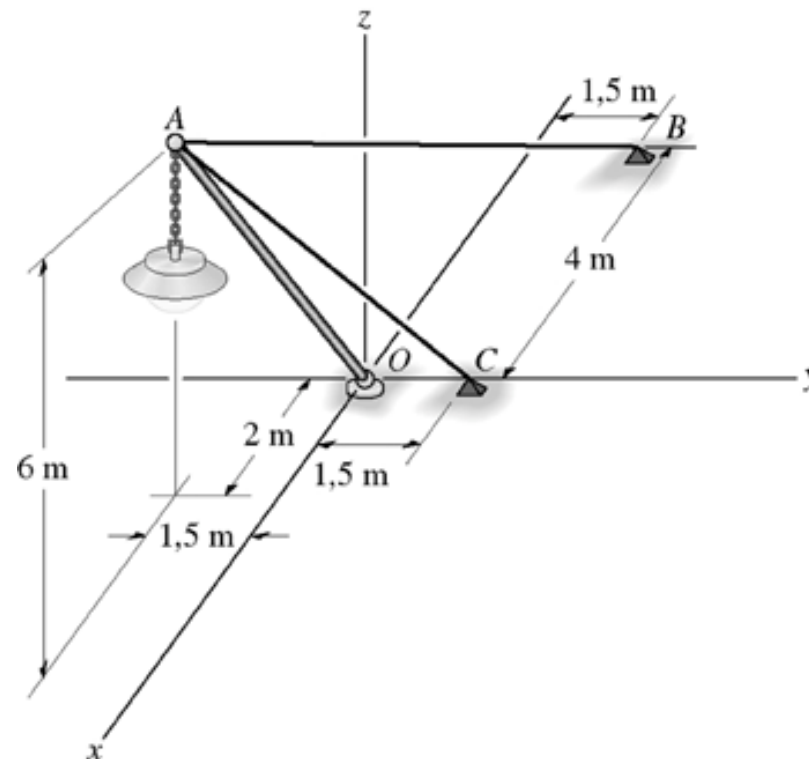
$$s_{OB} = \frac{97,98}{300}$$

$$s_{OB} = 0,326 \text{ m}$$



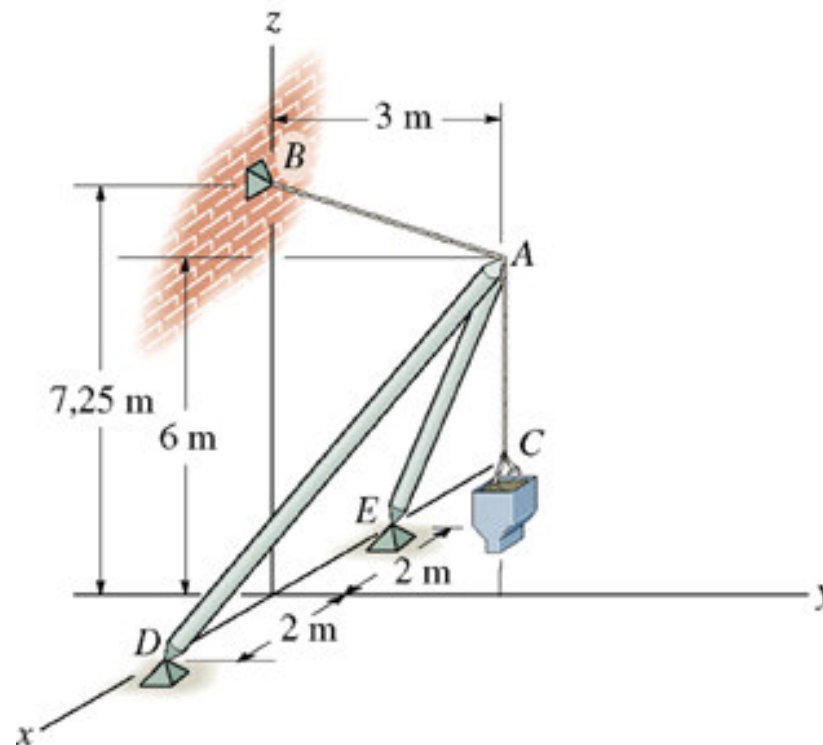
Exercícios Propostos

- 1) Os cabos AB e AC suportam uma tração máxima de 500N e o poste, uma compressão máxima de 300N . Determine o peso da luminária sustentada na posição mostrada. A força no poste atua ao longo de seu próprio eixo.



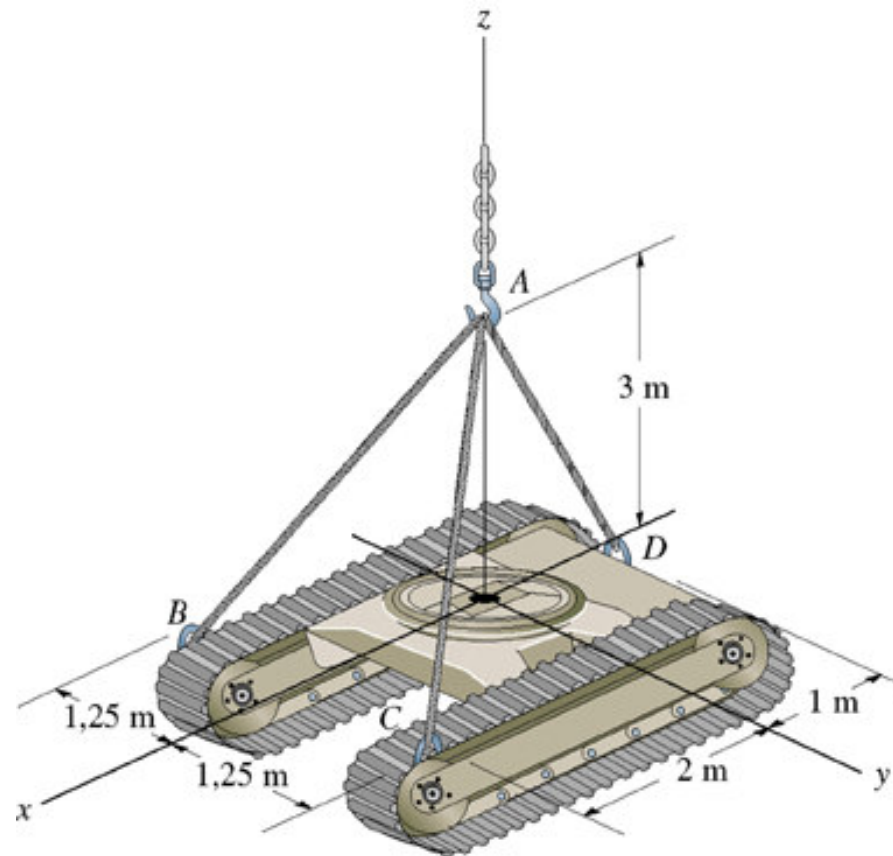
Exercícios Propostos

- 2) O cabo suporta a caçamba e seu conteúdo que tem massa total de 300kg. Determine as forças desenvolvidas nas escoras AD e AE e a força na parte AB do cabo para a condição de equilíbrio. A força em cada escora atua ao longo do seu próprio eixo.



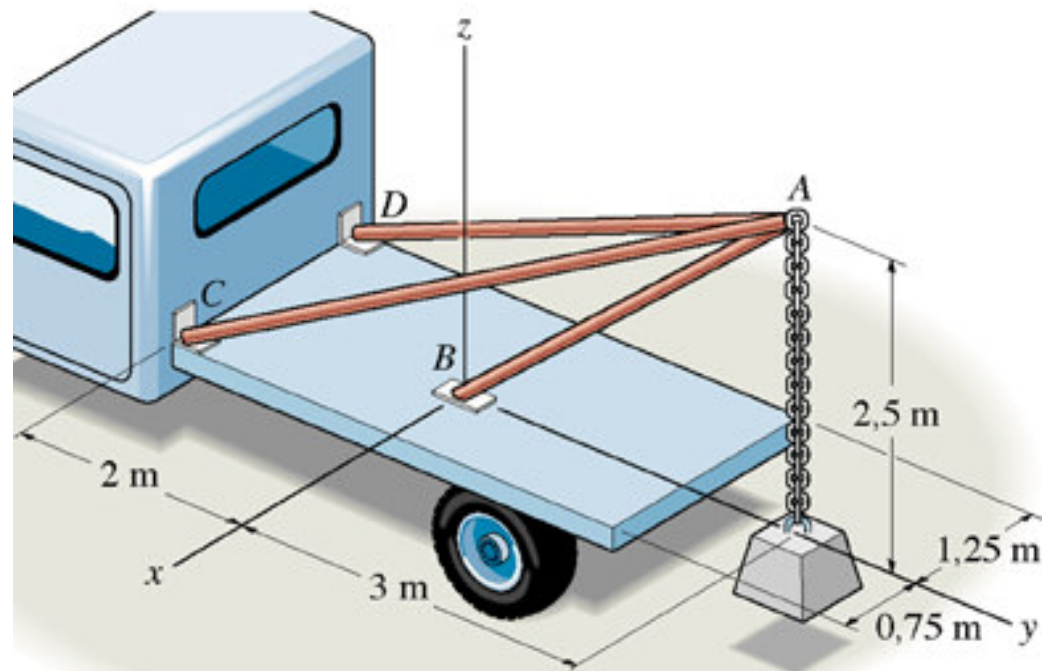
Exercícios Propostos

- 3) Determine a força necessária em cada um dos três cabos para levantar a escavadeira que tem massa de 8 toneladas.



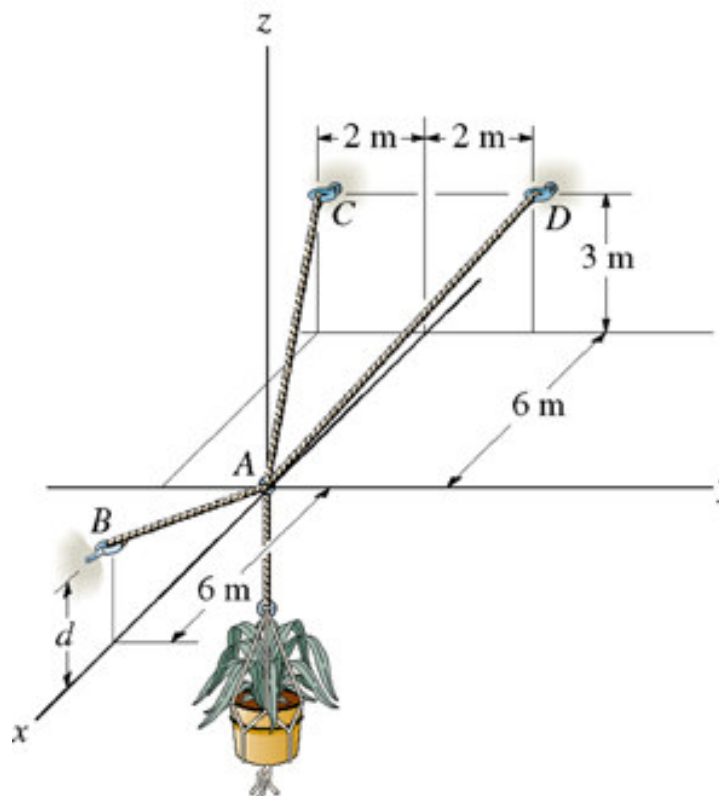
Exercícios Propostos

- 4) Determine a força necessária que atua ao longo do eixo de cada uma das três escoras para suportar o bloco de 500kg.



Exercícios Propostos

- 5) O vaso é suportado pelos cabos AB , AC e AD . Determine a força que atua em cada cabo para a condição de equilíbrio. Considere $d = 2,5\text{m}$.



Próxima Aula

- Avaliação 1.