INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

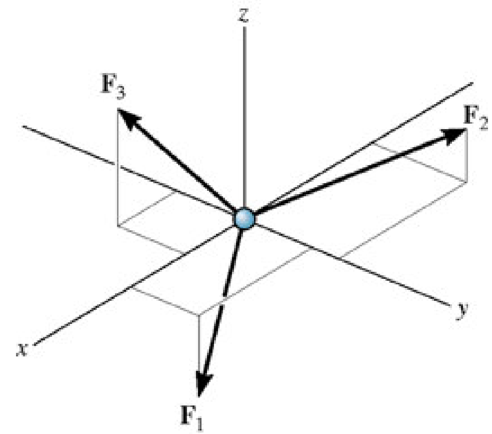
Aula 7 – Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Equilíbrio do Ponto Material de Sistemas Tridimensionais.
- Diagrama de Corpo Livre de Sistemas Tridimensionais.
- Equações de Equilíbrio de Sistemas Tridimensionais.

Formulação Matemática para o Equilíbrio em Três Dimensões



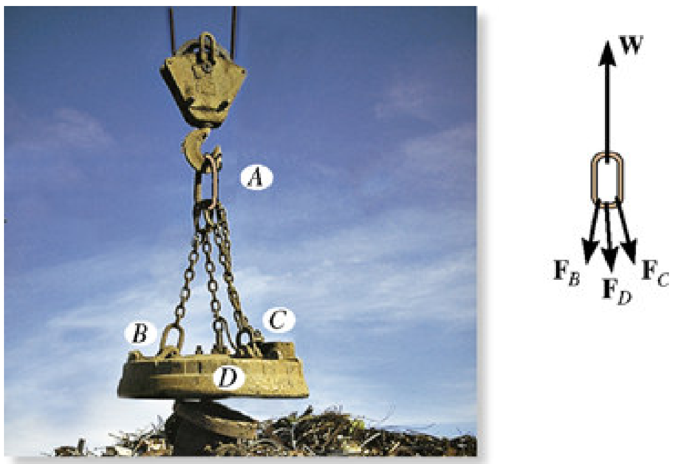
Para o Equilíbrio é necessário que:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k} = 0$$

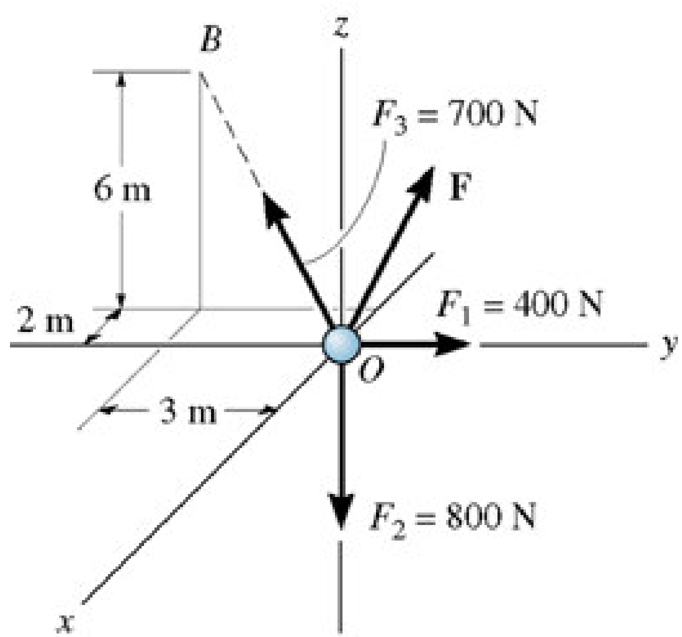
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

A solução é obtida por um sistema de três equações e três incógnitas



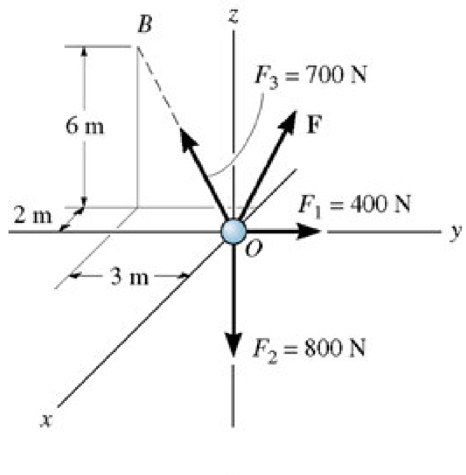
Exercício 1

- 1) Determine a intensidade e os ângulos diretores da força *F* necessários para o equilíbrio do ponto *O*.



(a)

Solução do Exercício 1



(a)

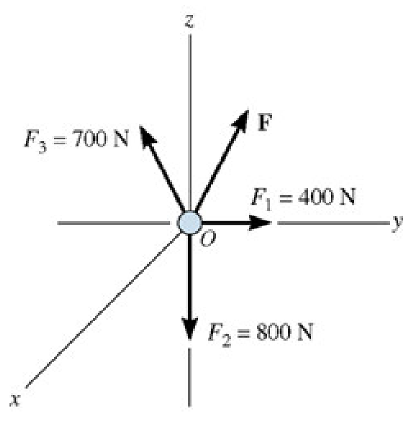
Determinação das forças:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = (400\vec{j})\text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = (-800\vec{k})\text{ N}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{OB}$$



(b)

Vetor unitário e Vetor posição:

$$\vec{u}_{OB} = \frac{\vec{r}_{OB}}{r_{OB}}$$

$$\vec{r}_{OB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}\text{ m}$$

$$r_{OB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$r_{OB} = 7\text{m}$$

$$\vec{u}_{OB} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{OB} = -0{,}286\vec{i} - 0{,}429\vec{j} + 0{,}857\vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{OB}$$

$$\vec{F}_3 = 700 \cdot (-0{,}286\vec{i} - 0{,}429\vec{j} + 0{,}857\vec{k})$$

$$\vec{F}_3 = (-200\vec{i} - 300\vec{j} + 600\vec{k})\text{ N}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Solução do Exercício 1

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F} = 0$$

$$400\vec{j} - 800\vec{k} - 200\vec{i} - 300\vec{j} + 600\vec{k} + F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow -200 + F_x = 0 \longrightarrow F_x = 200\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow 400 - 300 + F_y = 0 \longrightarrow F_y = -100\text{N}$$

$$\sum F_z = 0 \longrightarrow -800 + 600 + F_z = 0 \longrightarrow F_z = 200\text{N}$$

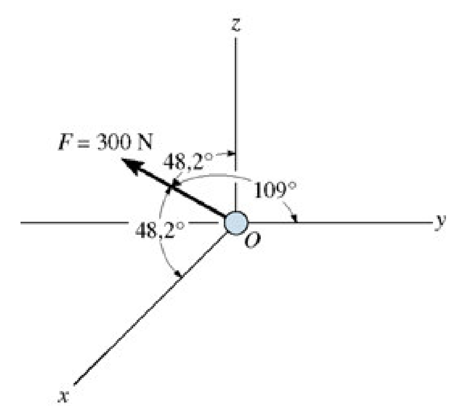
Vetor força ***F***:

$$F = (200\vec{i} - 100\vec{j} + 200\vec{k})\text{N}$$

Módulo de ***F***:

$$F = \sqrt{200^2 + 100^2 + 200^2}$$

$$F = 300\text{ N}$$



(c)

Solução do Exercício 1

Ângulos diretores de ***F***:

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$

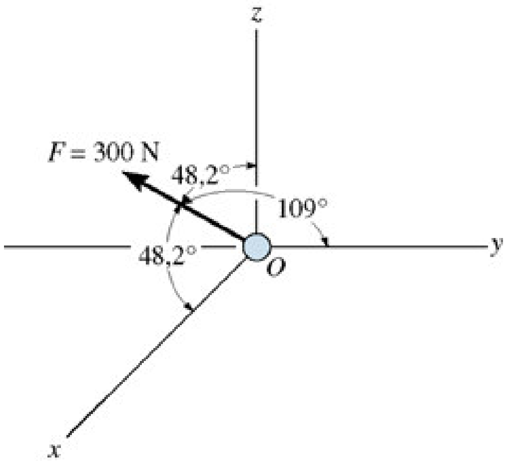
$$\vec{u}_F = \frac{200\vec{i} - 100\vec{j} + 200\vec{k}}{300}$$

$$\vec{u}_F = \left(\frac{200}{300}\right)\vec{i} - \left(\frac{100}{300}\right)\vec{j} + \left(\frac{200}{300}\right)\vec{k}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{200}{300}\right) \rightarrow \alpha = 48{,}2°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{-100}{300}\right) \rightarrow \beta = 109°$$

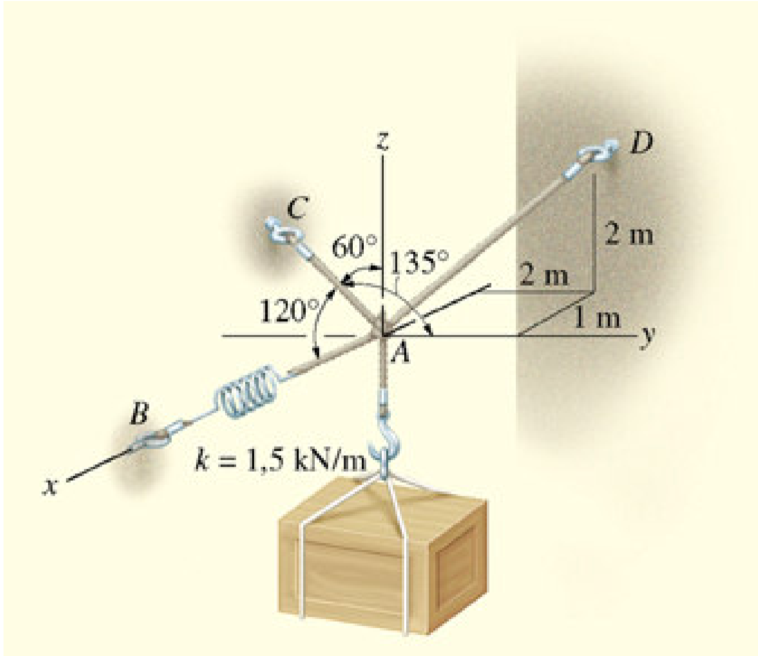
$$\gamma = \arccos\left(\frac{200}{300}\right) \rightarrow \gamma = 48{,}2°$$



(c)

Exercício 2

- 2) A caixa de 100kg mostrada na figura é suportada por três cordas, uma delas é acoplada na mola mostrada. Determine a força nas cordas *AC* e *AD* e a deformação da mola.



(a)

Solução do Exercício 2

Determinação das forças:

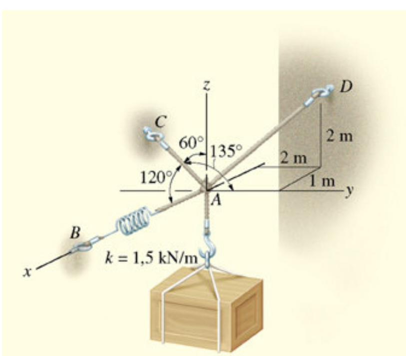
$$\vec{F}_B = (F_B \vec{i})\,\text{N}$$

$$\vec{F}_C = (F_C \cdot \cos 120° \vec{i} + F_C \cdot \cos 135° \vec{j} + F_C \cdot \cos 60 \vec{k})$$

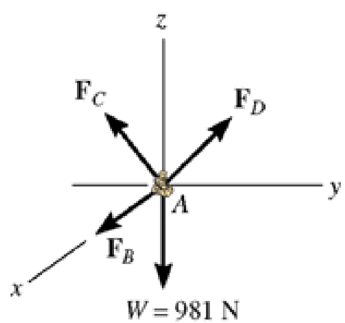
$$\vec{F}_C = (-0{,}5 \cdot F_C \vec{i} - 0{,}707 \cdot F_C \vec{j} + 0{,}5 \cdot F_C \vec{k})\,\text{N}$$

$$\vec{W} = (-981 \vec{k})\,\text{N}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$



(a)



(b)

Vetor unitário e Vetor posição:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}}$$

$$\vec{r}_{AD} = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\ \text{m}$$

$$r_{AD} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$

$$r_{AD} = 3\text{m}$$

$$\vec{u}_{AD} = \frac{-1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

$$\vec{u}_{AD} = -0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} + 0{,}667\vec{k}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot (-0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} + 0{,}667\vec{k})$$

$$\vec{F}_D = (-0{,}333 \cdot F_D \vec{i} + 0{,}667 \cdot F_D \vec{j} + 0{,}667 \cdot F_D \vec{k})\,\text{N}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Solução do Exercício 2

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{W} = 0$$

$$F_B\vec{i} - 0{,}5 \cdot F_C\vec{i} - 0{,}707 \cdot F_C\vec{j} + 0{,}5 \cdot F_C\vec{k} - 0{,}333 \cdot F_D\vec{i} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{j} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{k} - 981\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B - 0{,}5 \cdot F_C - 0{,}333 \cdot F_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -0{,}707 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D - 981 = 0 \quad \text{(III)}$$

Solução do Exercício 2

Solução das equações:

De (II):

$$F_D = \frac{0,707 \cdot F_C}{0,667} \Rightarrow F_D = 1,059 \cdot F_C \text{ (IV):}$$

Substituindo (IV) em (III):

$$0,5 \cdot F_C + (0,667 \cdot (1,059 \cdot F_C)) - 981 = 0$$

$$0,5 \cdot F_C + 0,706 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$1,207 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$F_C = \frac{981}{1,207}$$

$$F_C = 813\text{N}$$

Em (IV):

$$F_D = 1,059 \cdot 813$$

$$F_D = 862\text{N}$$

Em (I):

$$F_B - 0,5 \cdot 813 - 0,333 \cdot 862 = 0$$

$$F_B = 406,5 + 287,04$$

$$F_B = 693,7\text{N}$$

Deformação da mola:

$$F_B = k \cdot s$$

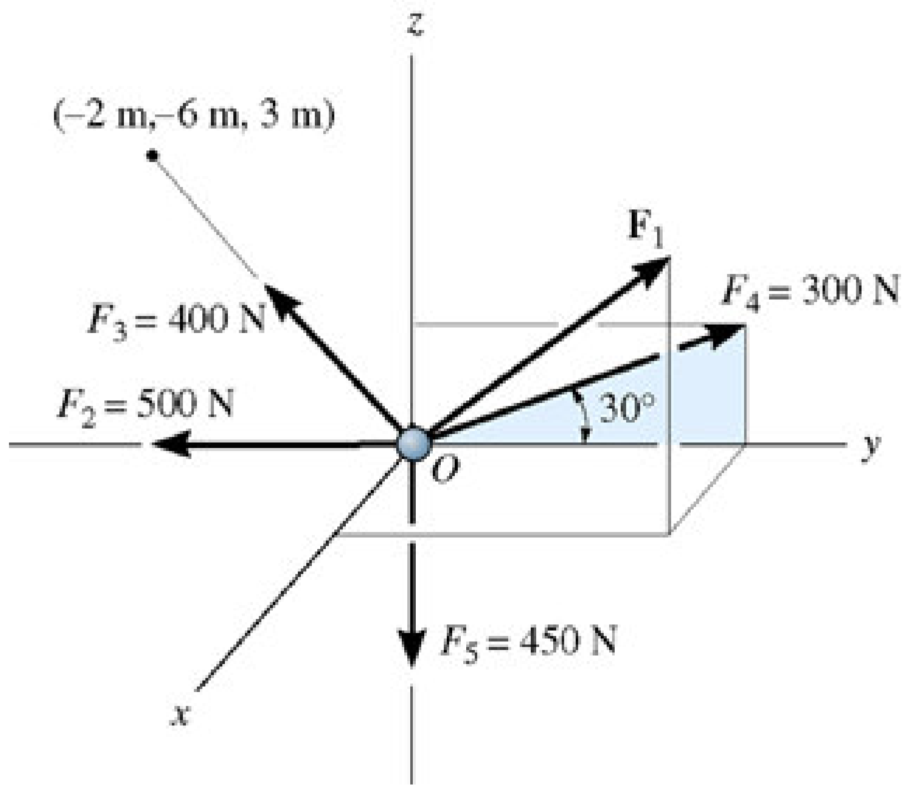
$$693,7 = 1500 \cdot s$$

$$s = \frac{693,7}{1500}$$

$$s = 0,462\text{m}$$

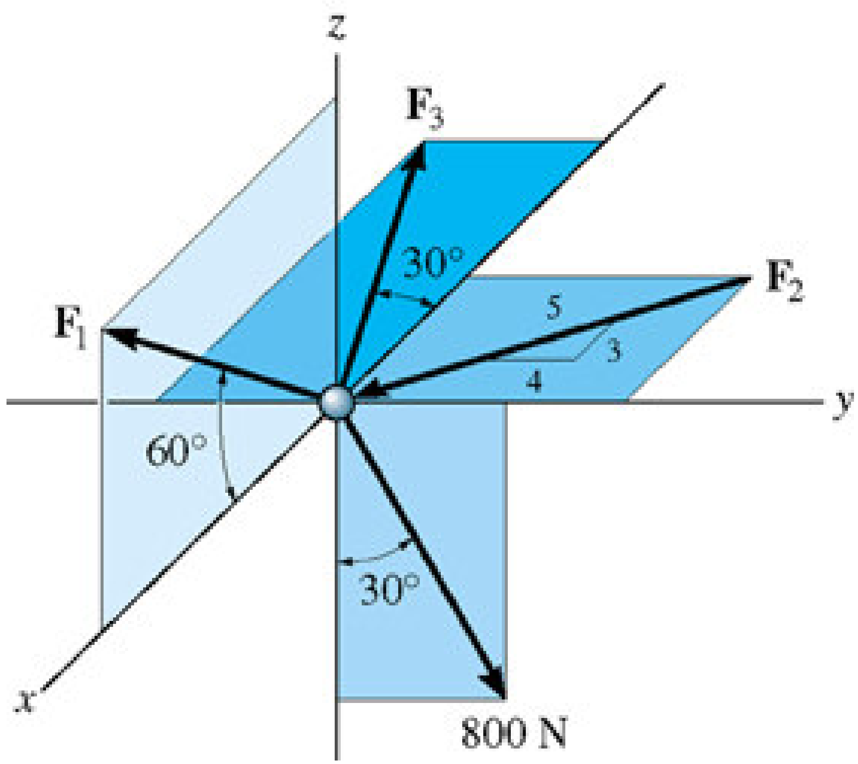
Exercícios Propostos

- 1) Determine a intensidade e o sentido de F_1 necessários para manter o sistema de forças concorrentes em equilíbrio.



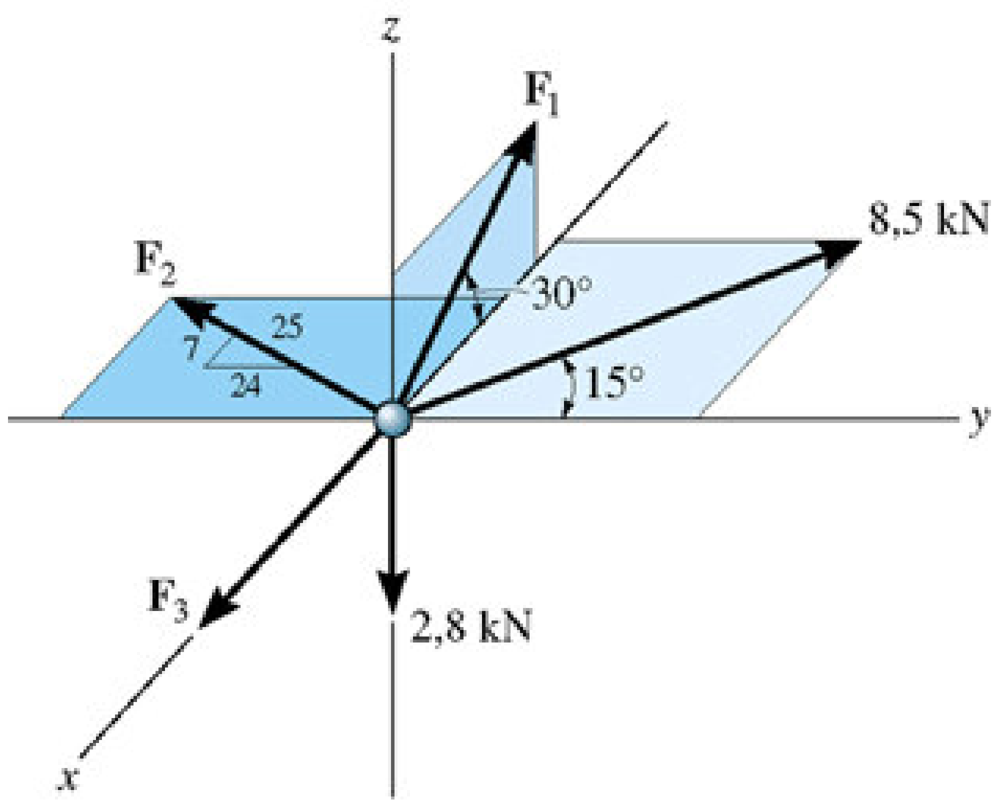
Exercícios Propostos

- 2) Determine as intensidades de F_1, F_2 e F_3 para a condição de equilíbrio do ponto material.



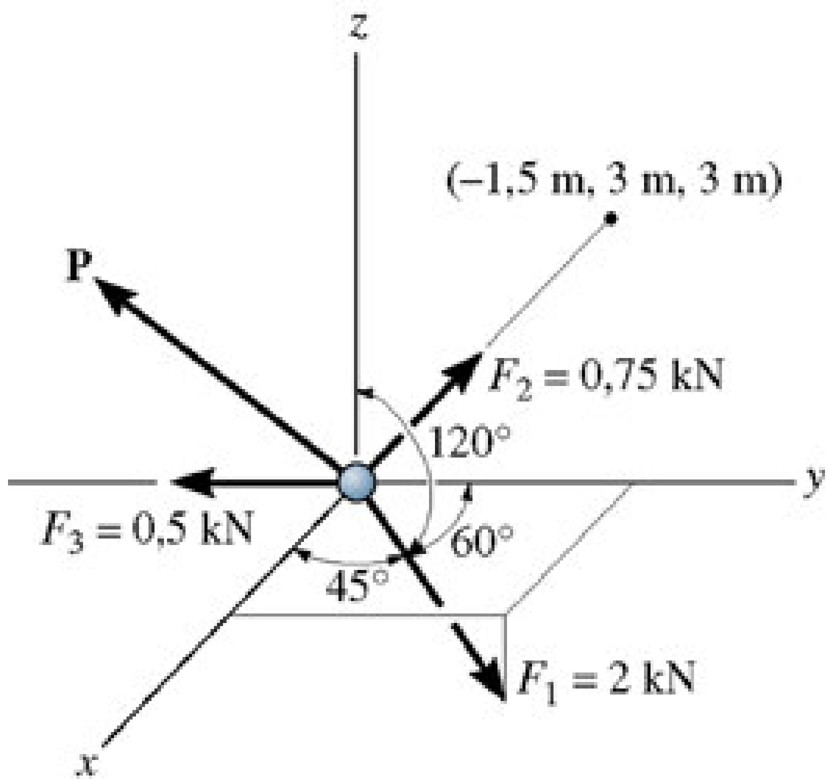
Exercícios Propostos

- 3) Determine as intensidades de F_1, F_2 e F_3 para a condição de equilíbrio do ponto material.



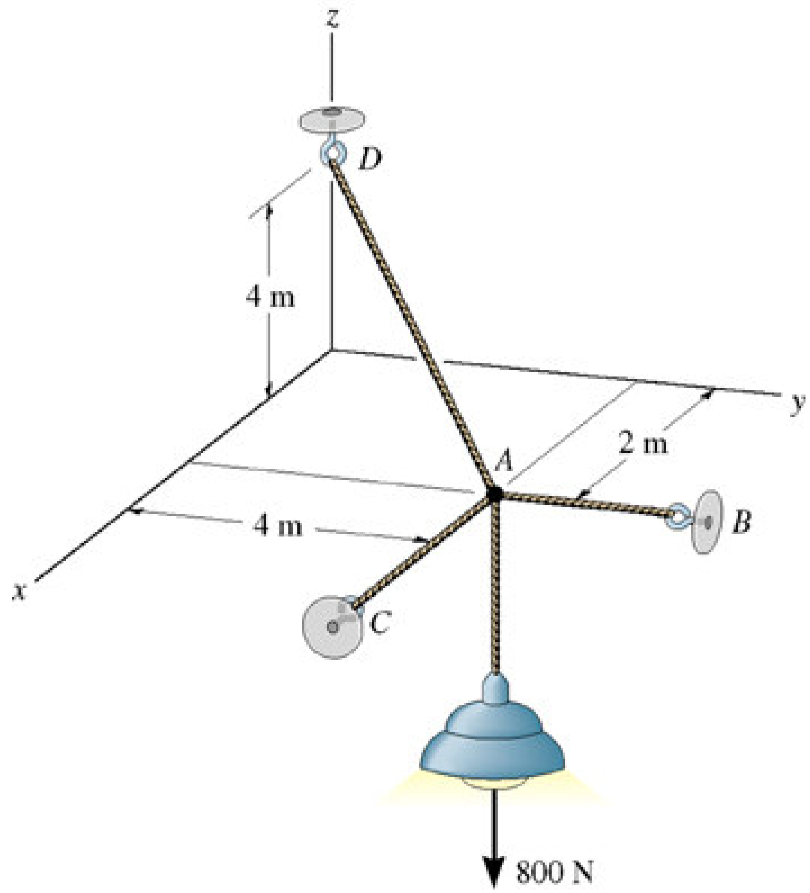
Exercícios Propostos

- 4) Determine a intensidade e o sentido de *P* necessários para manter o sistema de forças concorrentes em equilíbrio.



Exercícios Propostos

- 5) Os três cabos são usados para suportar a luminária de 800N. Determine a força desenvolvida em cada cabo para a condição de equilíbrio.



Próxima Aula

- Solução de Exercícios.
- Equilíbrio em Três Dimensões.