INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 5 – Vetor Posição, Aplicações do Produto Escalar

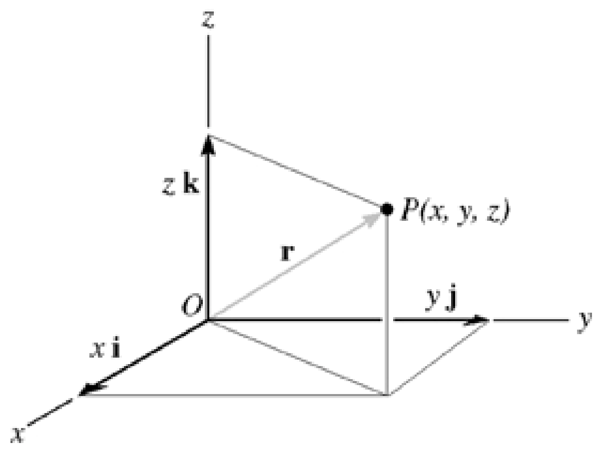
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

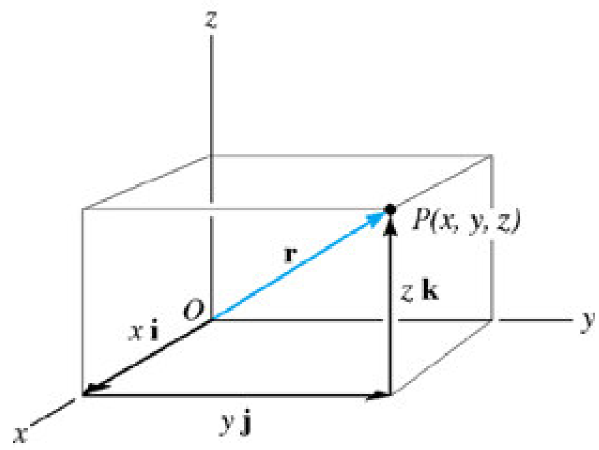
Tópicos Abordados Nesta Aula

- Vetores Posição.
- Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta.
- Produto Escalar Aplicado na Mecânica.

Vetores Posição

- O vetor posição é definido como um vetor fixo que localiza um ponto do espaço em relação a outro.
- O vetor posição pode ser escrito na forma cartesiana.

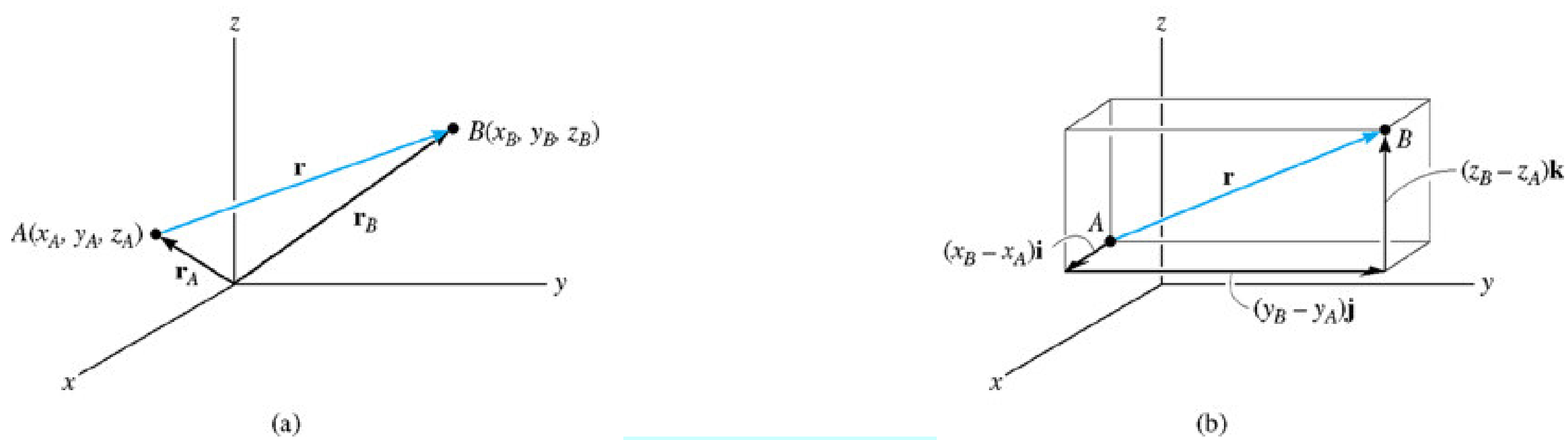




$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vetor Posição entre Dois Pontos *A* e *B* Fora da Origem

- O vetor posição é calculado a partir da subtração das coordenadas *x*, *y*, *z* das extremidades dos vetores em análise.
- O vetor posição indica o comprimento real ou a distância entre dois pontos no espaço.



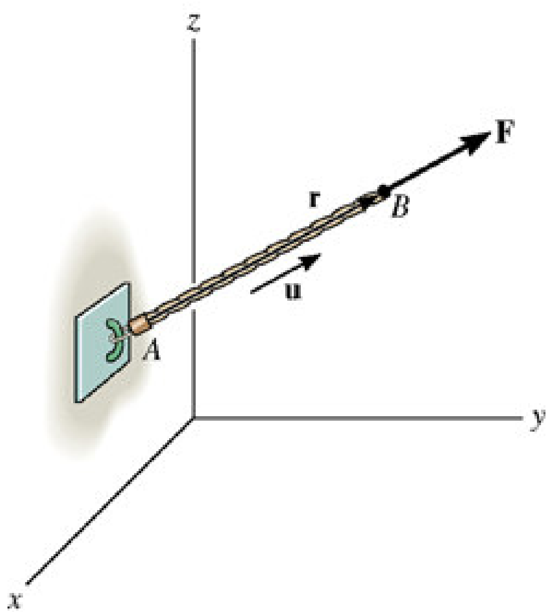
$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Aplicações do Vetor Posição

Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

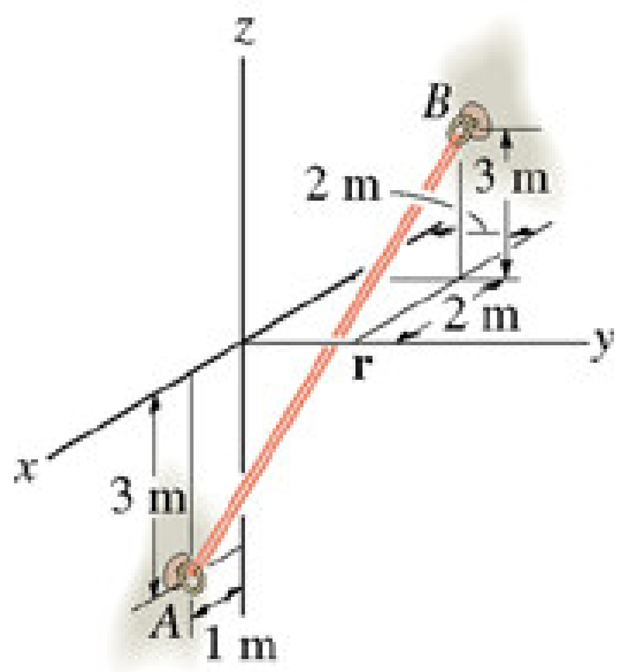
- Pode-se definir uma força como um vetor cartesiano pressupondo que ele tenha a mesma direção e sentido que o vetor posição orientado do ponto *A* para o ponto *B* na corda.



$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = F \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Exercício 1

- 1) a corda mostrada na figura está presa aos pontos *A* e *B*, determine seu comprimento e sua direção, medidos de *A* para *B*.



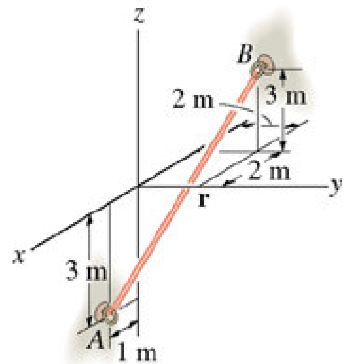
(a)

Solução do Exercício 1

Vetor Posição *AB*:

$A \quad (1, 0, -3)\,\text{m}$

$B \quad (-2, 2, 3)\,\text{m}$



(a)

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

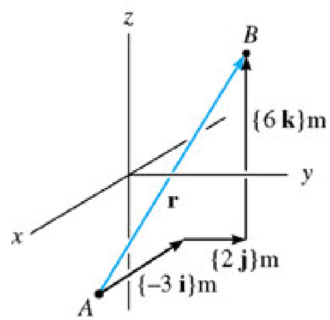
$$\vec{r}_{AB} = (-2 - 1)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (3 - (-3))\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})\,\text{m}$$

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$r_{AB} = 7\,\text{m}$$



(b)

Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0{,}428\vec{i} + 0{,}285\vec{j} + 0{,}857\vec{k}$$

Solução do Exercício 1

Ângulos Diretores:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABx}}{r_{AB}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-3}{7}\right)$$

$$\alpha = 115°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABy}}{r_{AB}}\right)$$

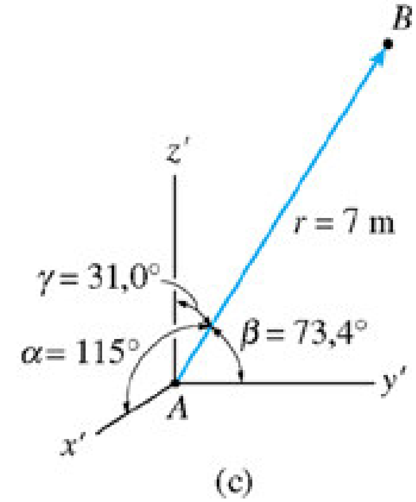
$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$\beta = 73{,}4°$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABz}}{r_{AB}}\right)$$

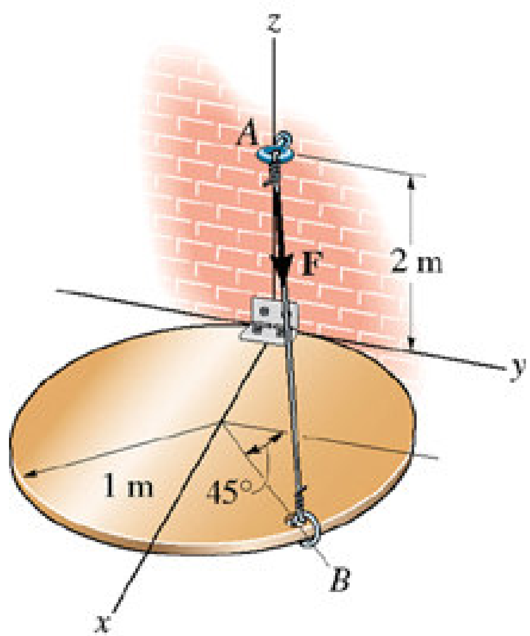
$$\gamma = \arccos\left(\frac{6}{7}\right)$$

$$\gamma = 31°$$



Exercício 2

- 2) A placa circular é parcialmente suportada pelo cabo AB. Sabe-se que a força no cabo em A é igual a 500N, expresse essa força como um vetor cartesiano.



(a)

Solução do Exercício 2

Vetor Posição *AB*:

$A \quad (0,\ 0,\ 2)$ m

$B \quad 1{,}707;\ 0{,}707;\ 0)$ m

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

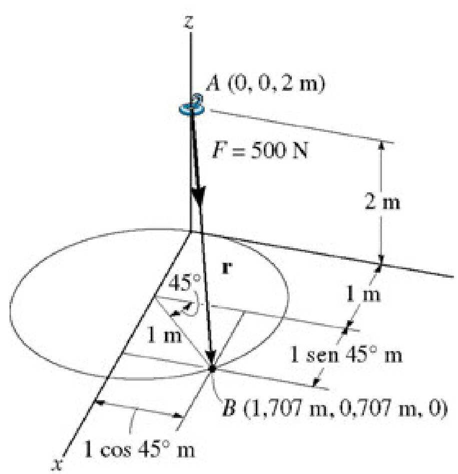
$$\vec{r}_{AB} = (1{,}707 - 0)\vec{i} + (0{,}707 - 0)\vec{j} + (0 - 2)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (1{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{j} - 2\vec{k})\text{m}$$

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{AB} = \sqrt{1{,}707^2 + 0{,}707^2 + 2^2}$$

$$r_{AB} = 2{,}723\text{m}$$



(b)

Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{1{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{j} - 2\vec{k}}{2{,}723}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0{,}626\vec{i} + 0{,}259\vec{j} - 0{,}734\vec{k}$$

Vetor Força:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = 500 \cdot (0{,}626\vec{i} + 0{,}259\vec{j} - 0{,}734\vec{k})$$

$$\vec{F} = (31{,}3\vec{i} + 130\vec{j} - 367\vec{k})\text{N}$$

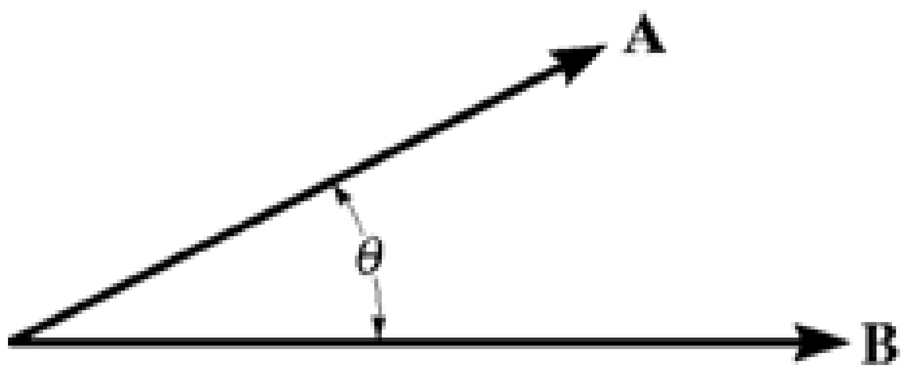
Produto Escalar

- Em determinados problemas de estática é necessário se determinar o ângulo formado entre duas retas ou então os componentes paralelo e perpendicular de uma força em relação a um eixo.
- Principalmente em problemas tridimensionais, a solução por trigonometria torna-se complicada, dessa forma uma maneira rápida de se obter o resultado desejado é a partir da álgebra vetorial.
- O método que pose ser utilizado é o produto escalar entre dois vetores.

Formulação do Produto Escalar

- O produto escalar de dois vetores fornece como resultado um escalar e não um vetor e é definido conforme a equação mostrada a seguir.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta$$



$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \qquad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0$$

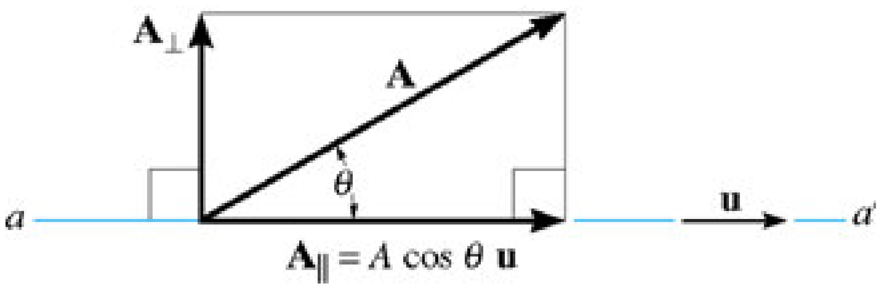
$$\vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \qquad \vec{k} \bullet \vec{j} = 0$$

$$\vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \qquad \vec{i} \bullet \vec{k} = 0$$

Ângulo entre dois Vetores:

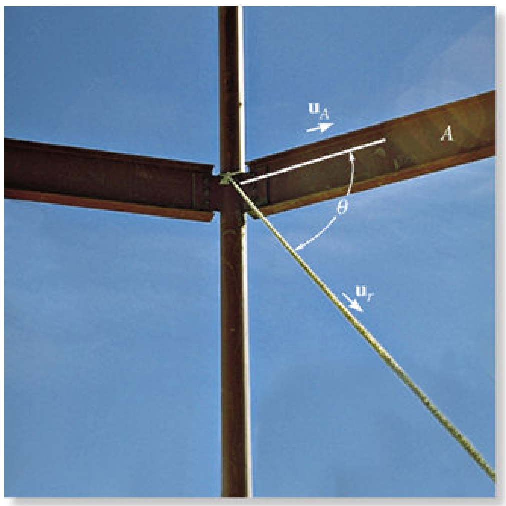
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{A \cdot B}\right)$$

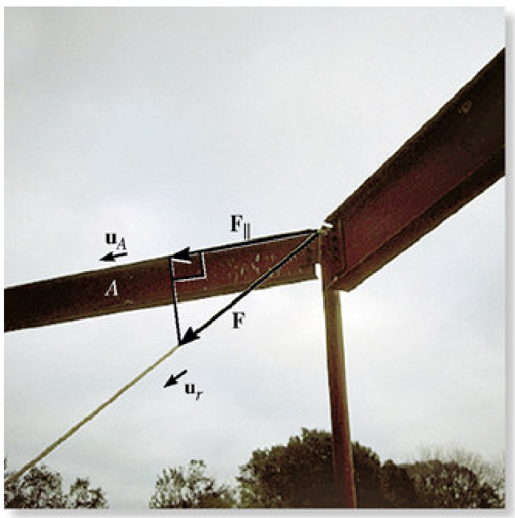
Componentes Paralelo e Perpendicular de um Vetor



$$A_{//} = A \cdot \cos\theta = \vec{A} \bullet \vec{u}$$

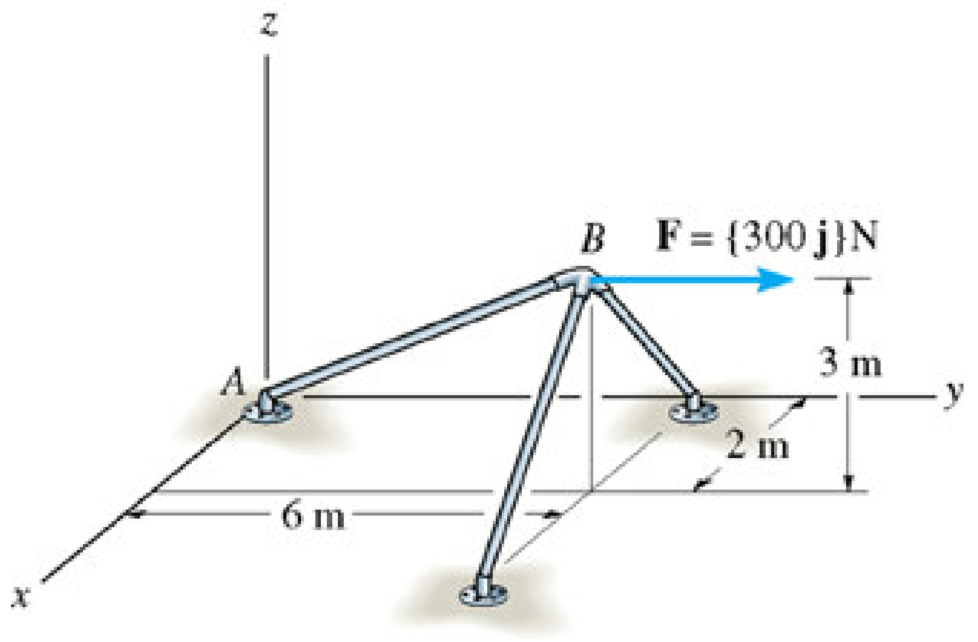
$$A_{\perp} = \sqrt{A^2 - A_{//}^{\,2}}$$





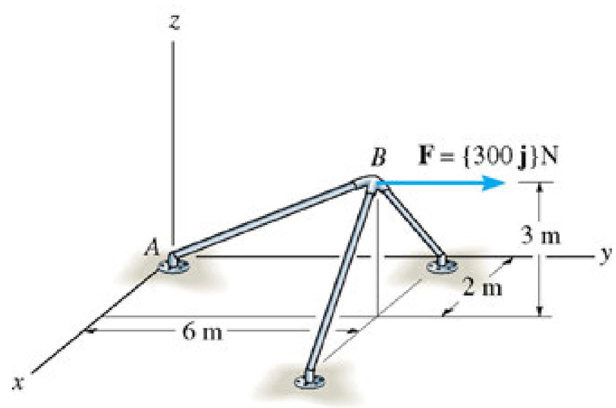
Exercício 3

- 3) A estrutura mostrada na figura está submetida a uma força horizontal. Determine a intensidade dos componentes dessa força paralela e perpendicular ao elemento *AB*.

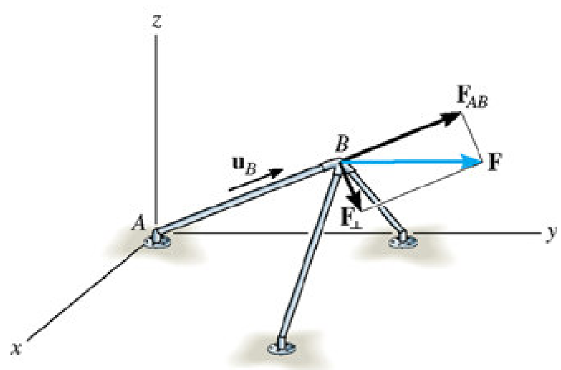


(a)

Solução do Exercício 3



(a)



(b)

Força Paralela a Barra *AB*:

$$F_{//AB} = F \cdot \cos\theta = \vec{F} \bullet \vec{u}_{AB}$$

Cálculo do Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

Vetor Posição *AB*:

$$\vec{r}_{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do Posição *AB*:

$$r_{AB} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$r_{AB} = 7 \text{ m}$$

Solução do Exercício 3

Cálculo do Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_{AB} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0{,}286\vec{i} + 0{,}857\vec{j} + 0{,}429\vec{k}$$

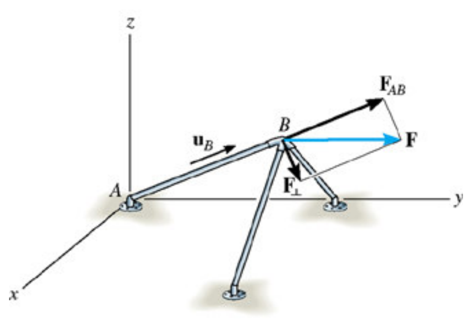
Força Paralela a Barra *AB*:

$$F_{//AB} = F \cdot \cos\theta = \vec{F} \bullet \vec{u}_{AB}$$

$$F_{//AB} = (300\vec{j}) \bullet (0{,}286\vec{i} + 0{,}857\vec{j} + 0{,}429\vec{k})$$

$$F_{//AB} = (0 \cdot 0{,}286) + (300 \cdot 0{,}857) + (0 \cdot 0{,}429)$$

$$F_{//AB} = 257{,}1\text{N}$$



(b)

Vetor Força Paralela a Barra *AB*:

$$\vec{F}_{//AB} = F_{//AB} \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F}_{//AB} = 257{,}1 \cdot (0{,}286\vec{i} + 0{,}857\vec{j} + 0{,}429\vec{k})$$

$$\vec{F}_{//AB} = (73{,}5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k})\text{N}$$

Força Perpendicular a Barra *AB*:

$$\vec{F}_{\perp AB} = \vec{F} - \vec{F}_{//AB}$$

$$\vec{F}_{\perp AB} = (300\vec{j}) - (73{,}5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k})$$

$$\vec{F}_{\perp AB} = (-73{,}5\vec{i} + 80\vec{j} - 110\vec{k})\text{N}$$

Em Módulo:

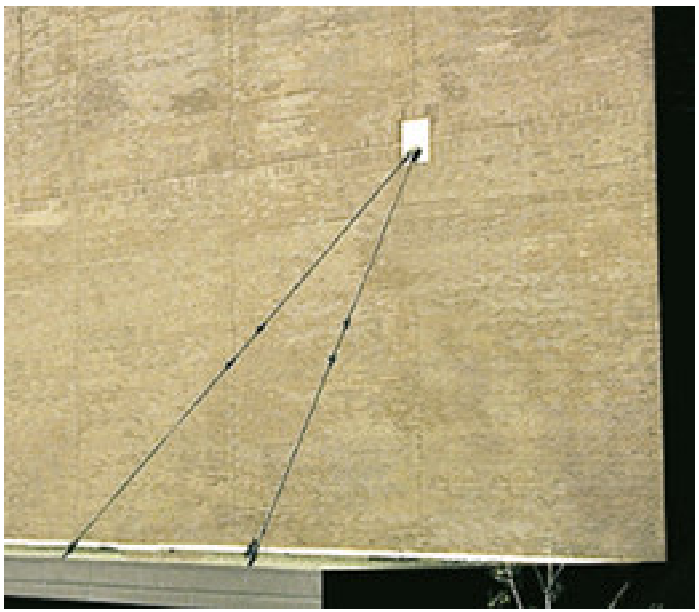
$$F_{\perp AB} = \sqrt{F^2 + F_{//AB}{}^2}$$

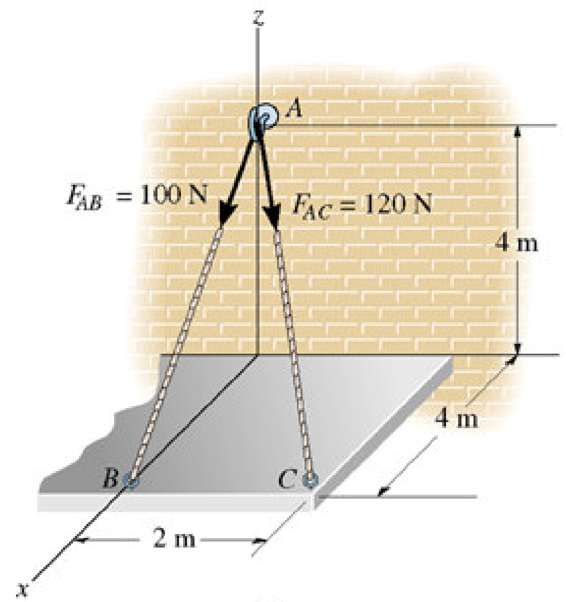
$$F_{\perp AB} = \sqrt{300^2 + 257{,}1^2}$$

$$F_{\perp AB} = 155\ \text{N}$$

Exercícios Propostos

- 1) A cobertura é suportada por cabos como mostrado. Determine a intensidade da força resultante que atua em *A*.

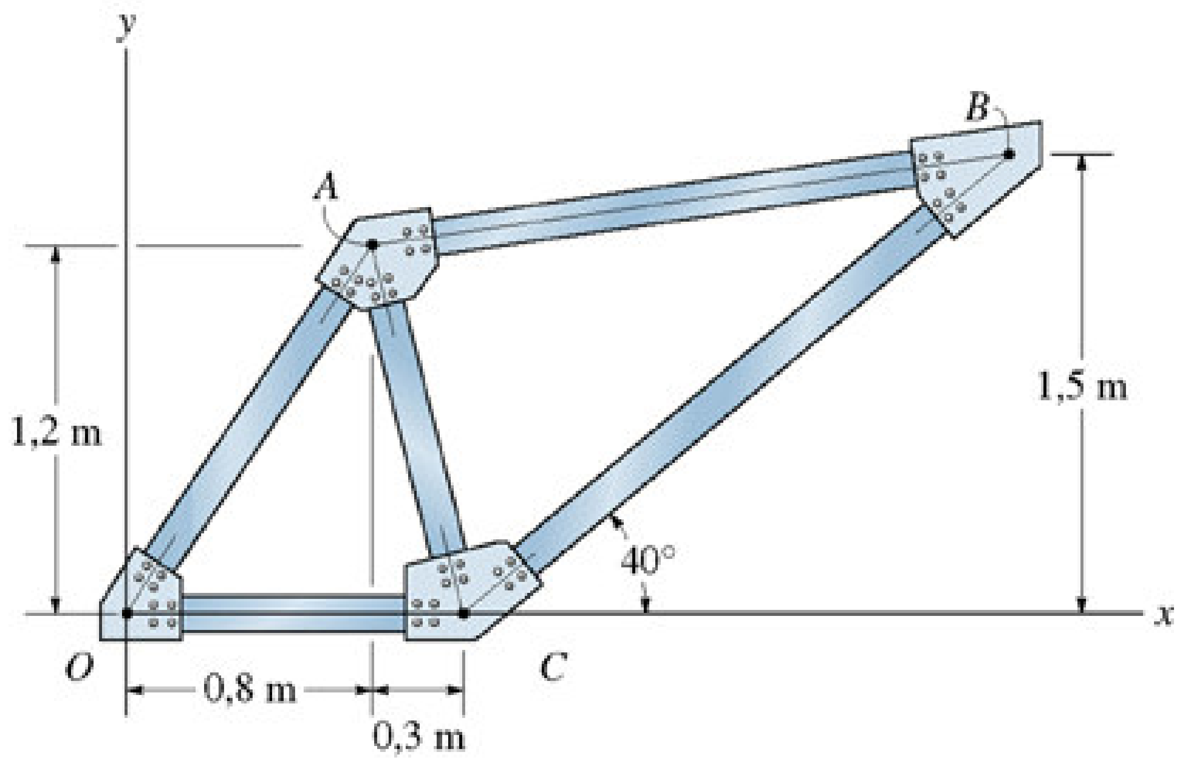




(a)

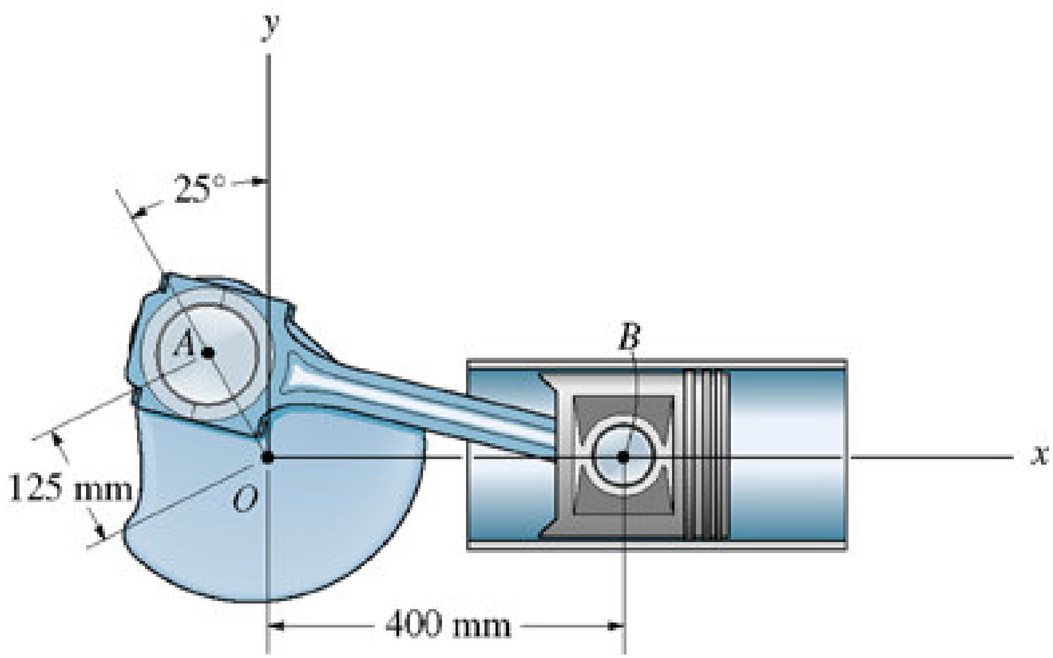
Exercícios Propostos

- 2) Determine o comprimento do elemento *AB* da treliça.



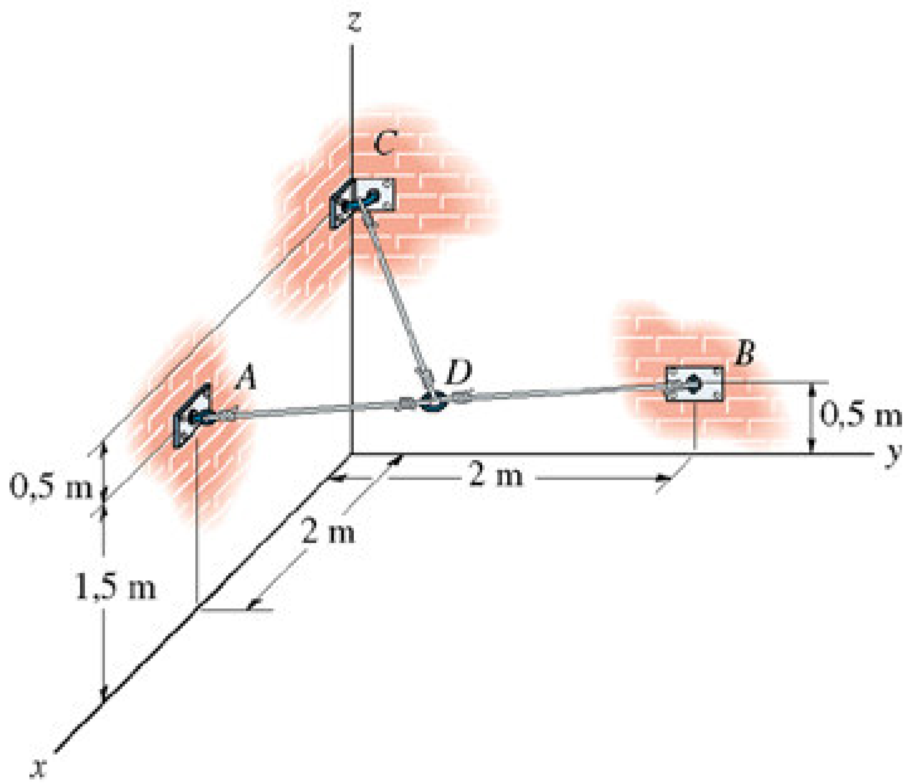
Exercícios Propostos

- 3) Determine o comprimento do elemento *AB* da biela do motor mostrado.



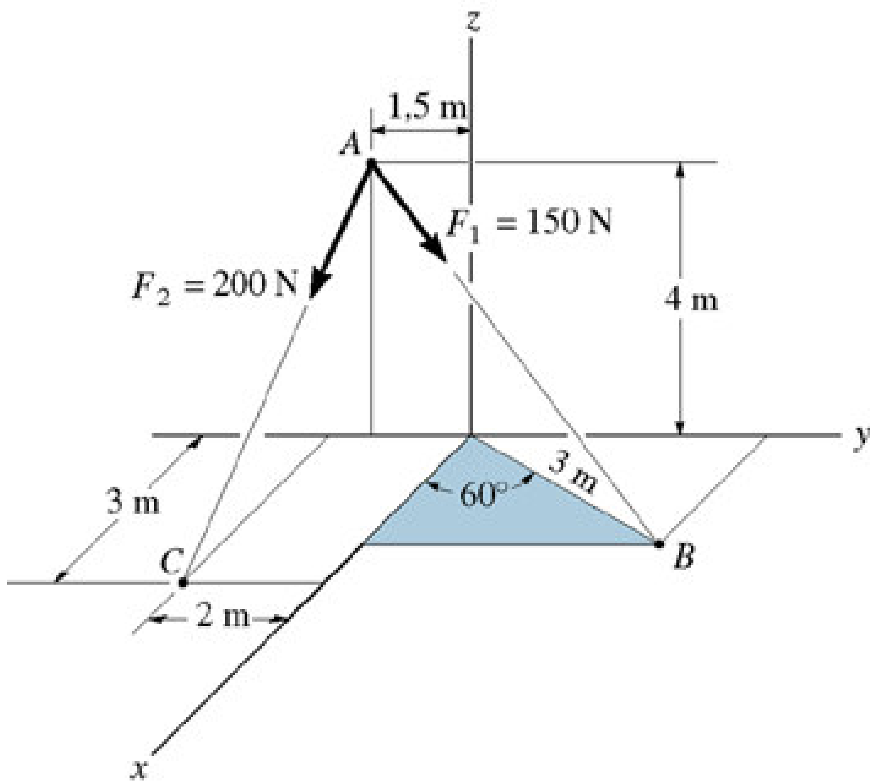
Exercícios Propostos

- 4) Determine os comprimentos dos arames *AD*, *BD* e *CD*. O anel *D* está no centro entre *A* e *B*.



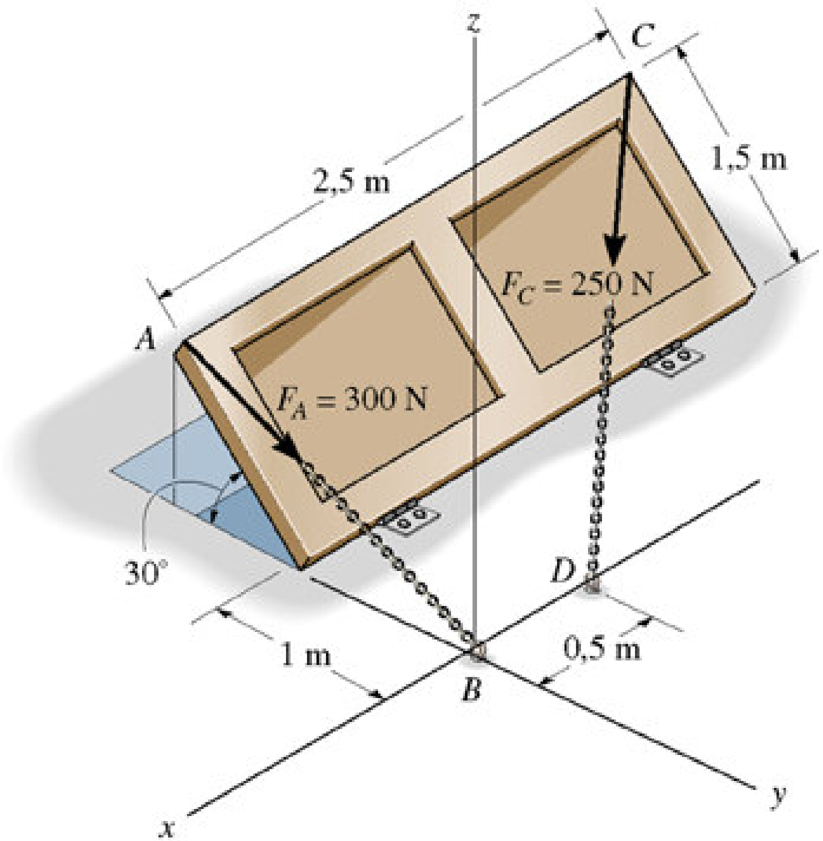
Exercícios Propostos

- 5) Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o ponto *A*.



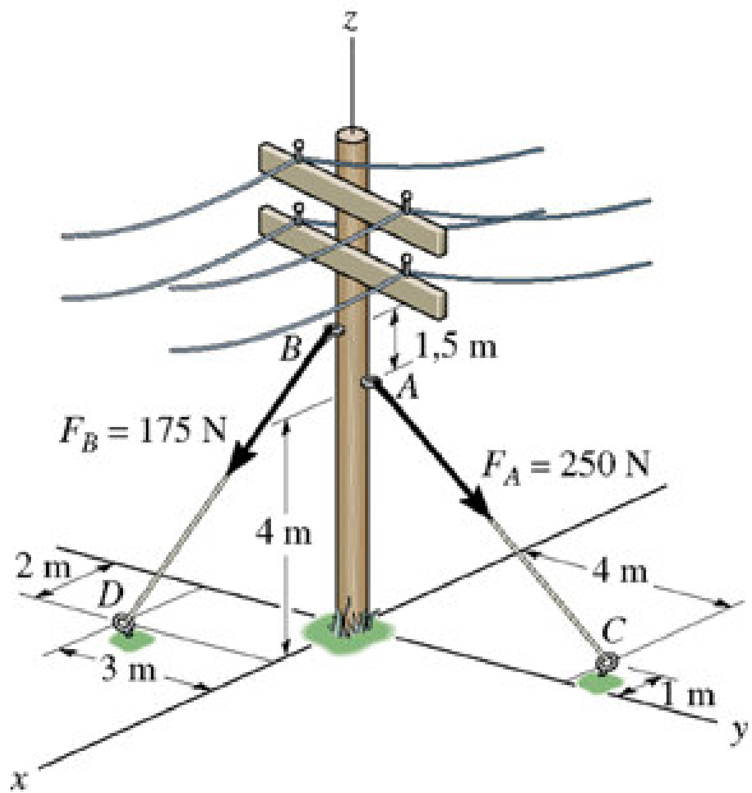
Exercícios Propostos

- 6) A porta é mantida aberta por meio de duas correntes. Se a tensão em *AB* e *CD* for F_{AB} = 300N e F_{CD} = 250N, expresse cada uma dessas forças como um vetor cartesiano.



Exercícios Propostos

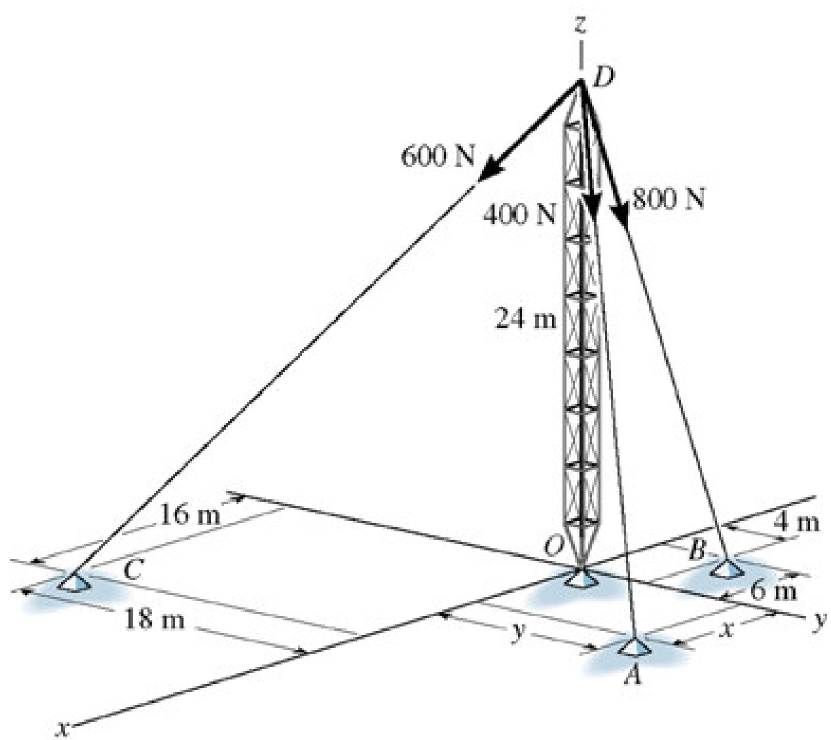
- 7) Os cabos de tração são usados para suportar o poste de telefone. Represente a força em cada cabo como um vetor cartesiano.



Exercícios Propostos

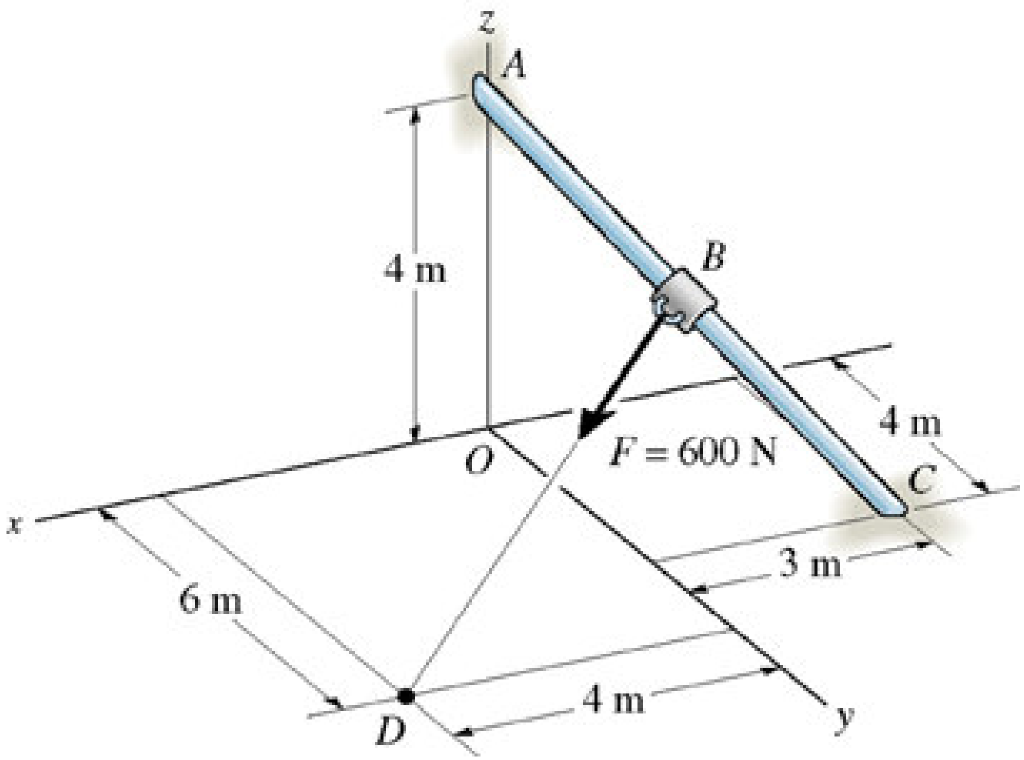
- 8) A torre é mantida reta pelos três cabos. Se a força em cada cabo que atua sobre a torre for aquela mostrada na figura, determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante.

  Considere $x = 20\text{m}$ e $y = 15\text{m}$.



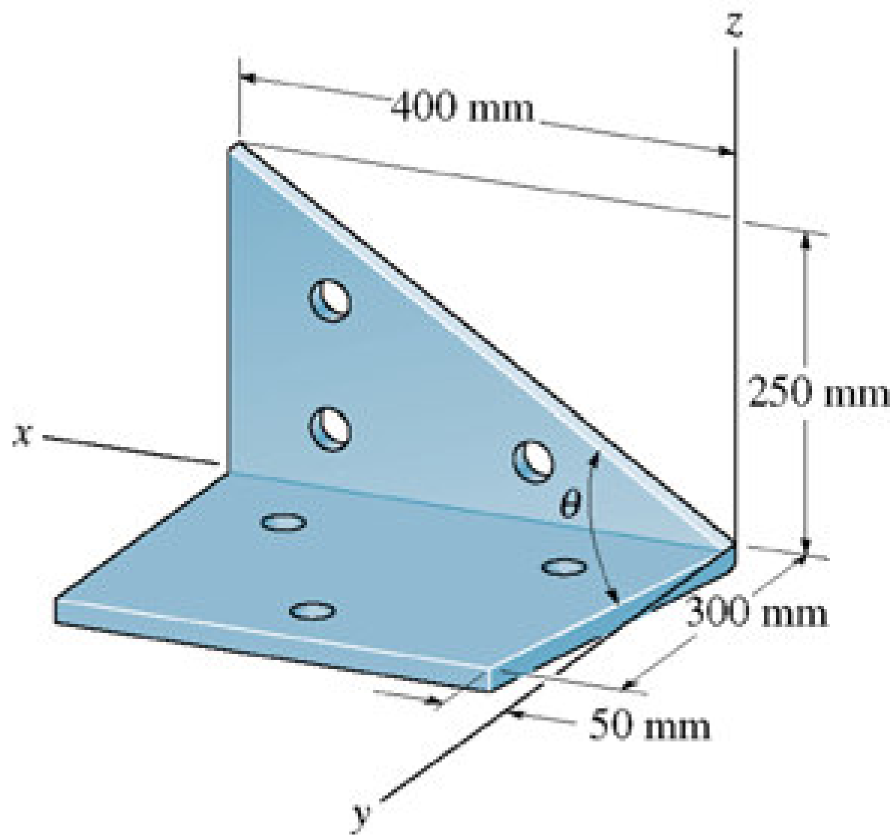
Exercícios Propostos

- 9) Determine os componentes de *F* paralelo e perpendicular a barra *AC*. O ponto *B* está no ponto médio de *AC*.



Exercícios Propostos

- 10) Determine o ângulo θ mostrado na figura a seguir.



Próxima Aula

- Equilíbrio do Ponto Material.
- Diagrama de Corpo Livre.
- Equações de Equilíbrio.
- Equilíbrio de Sistemas Bidimensionais.