



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
SÃO PAULO

# Mecânica Técnica

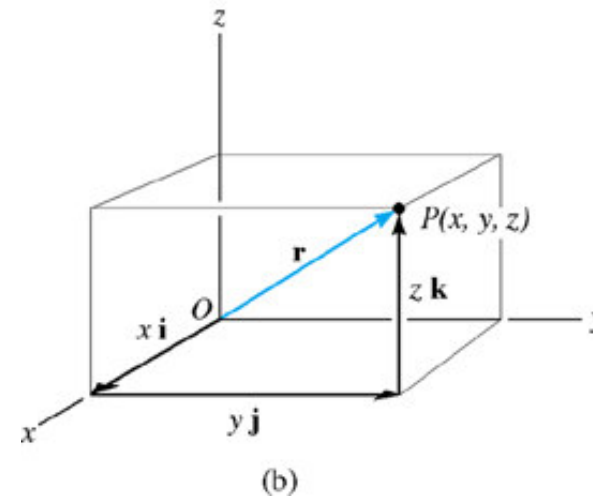
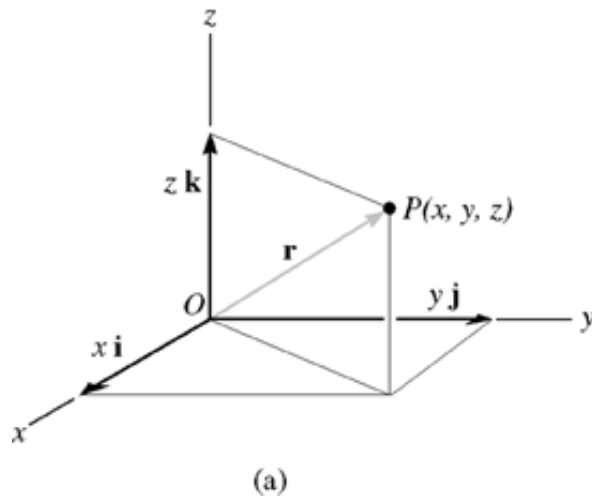
## Aula 5 – Vetor Posição, Aplicações do Produto Escalar

# Tópicos Abordados Nesta Aula

- Vetores Posição.
- Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta.
- Produto Escalar Aplicado na Mecânica.

# Vetores Posição

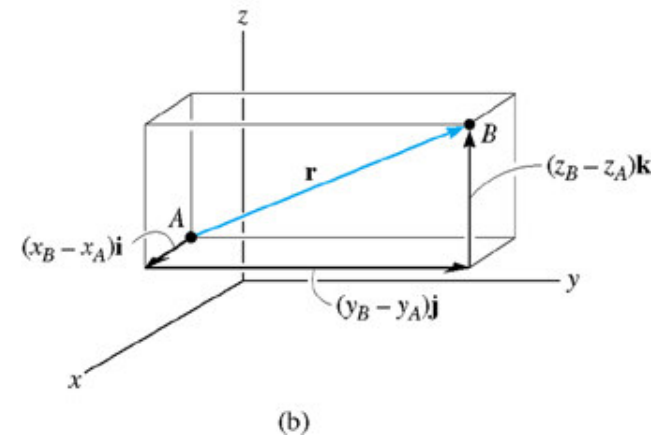
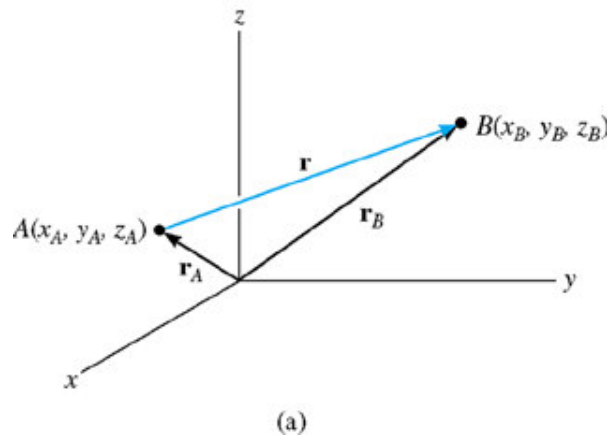
- O vetor posição é definido como um vetor fixo que localiza um ponto do espaço em relação a outro.
- O vetor posição pode ser escrito na forma cartesiana.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

# Vetor Posição entre Dois Pontos A e B Fora da Origem

- O vetor posição é calculado a partir da subtração das coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  das extremidades dos vetores em análise.
- O vetor posição indica o comprimento real ou a distância entre dois pontos no espaço.



$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

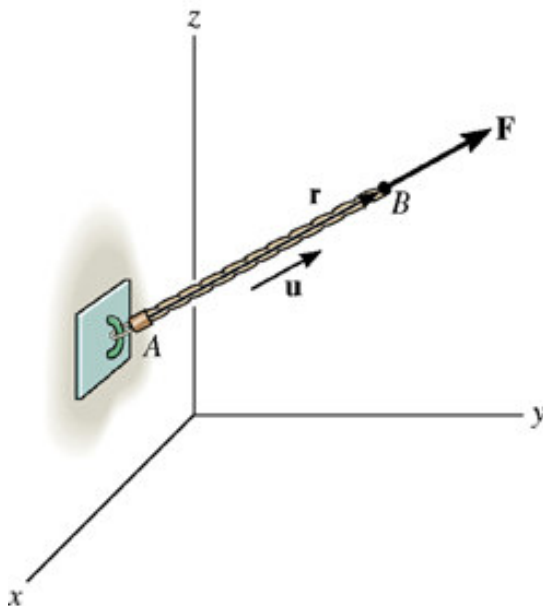
$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

# Aplicações do Vetor Posição



# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

- Pode-se definir uma força como um vetor cartesiano pressupondo que ele tenha a mesma direção e sentido que o vetor posição orientado do ponto  $A$  para o ponto  $B$  na corda.

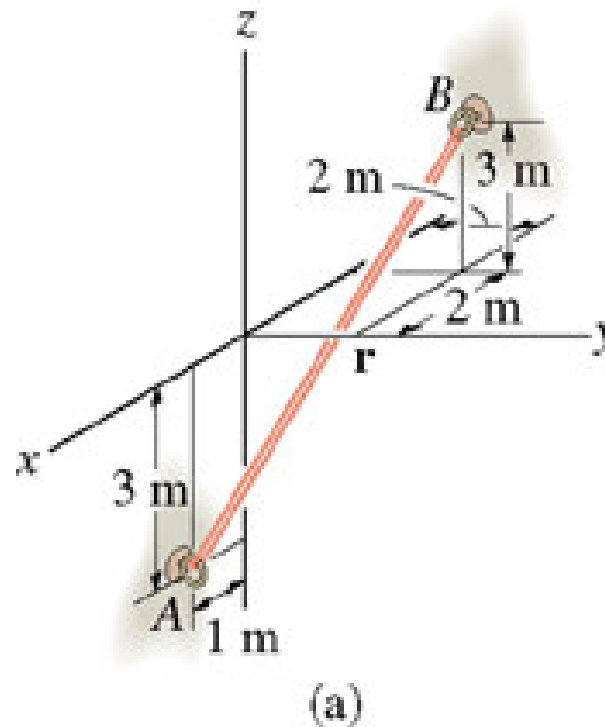


$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = F \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$



# Exercício 1

- 1) a corda mostrada na figura está presa aos pontos  $A$  e  $B$ , determine seu comprimento e sua direção, medidos de  $A$  para  $B$ .

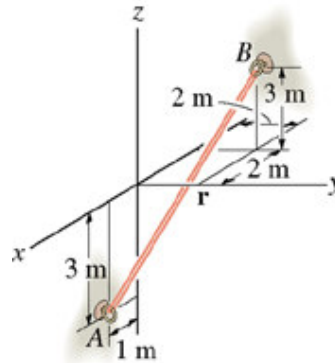


# Solução do Exercício 1

Vetor Posição  $AB$ :

$$A \quad (1, 0, -3) \text{ m}$$

$$B \quad (-2, 2, 3) \text{ m}$$



$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

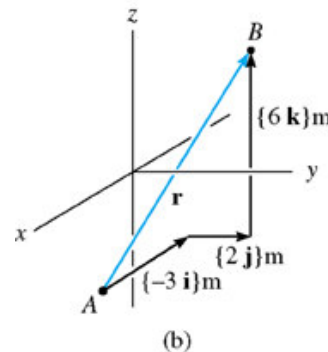
$$\vec{r}_{AB} = (-2 - 1)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (3 - (-3))\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}) \text{ m}$$

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$r_{AB} = 7 \text{ m}$$



Vetor Unitário  $AB$ :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0,428\vec{i} + 0,285\vec{j} + 0,857\vec{k}$$



# Solução do Exercício 1

Ângulos Diretores:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABx}}{r_{AB}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-3}{7}\right)$$

$$\alpha = 115^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABy}}{r_{AB}}\right)$$

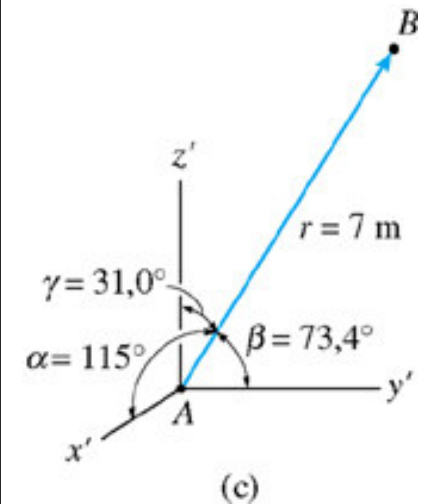
$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$\beta = 73,4^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABz}}{r_{AB}}\right)$$

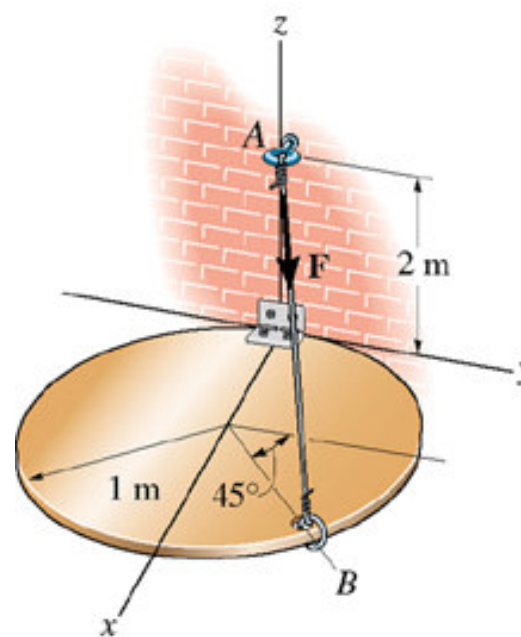
$$\gamma = \arccos\left(\frac{6}{7}\right)$$

$$\gamma = 31^\circ$$



## Exercício 2

- 2) A placa circular é parcialmente suportada pelo cabo AB. Sabe-se que a força no cabo em A é igual a 500N, expresse essa força como um vetor cartesiano.



(a)

# Solução do Exercício 2

Vetor Posição  $AB$ :

$$A \quad (0, 0, 2) \text{ m}$$

$$B \quad (1,707; 0,707; 0) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

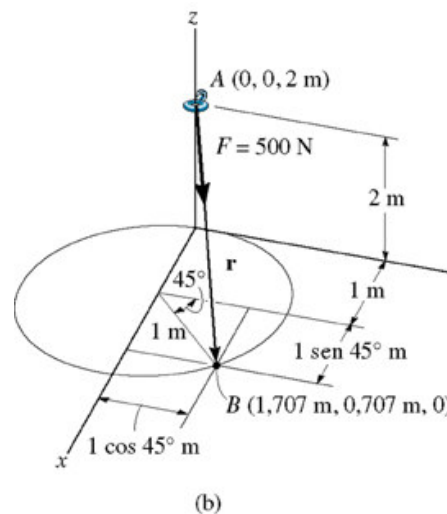
$$\vec{r}_{AB} = (1,707 - 0)\vec{i} + (0,707 - 0)\vec{j} + (0 - 2)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (1,707\vec{i} + 0,707\vec{j} - 2\vec{k}) \text{ m}$$

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{AB} = \sqrt{1,707^2 + 0,707^2 + 2^2}$$

$$r_{AB} = 2,723 \text{ m}$$



Vetor Unitário  $AB$ :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{1,707\vec{i} + 0,707\vec{j} - 2\vec{k}}{2,723}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0,626\vec{i} + 0,259\vec{j} - 0,734\vec{k}$$

Vetor Força:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = 500 \cdot (0,626\vec{i} + 0,259\vec{j} - 0,734\vec{k})$$

$$\vec{F} = (31,3\vec{i} + 130\vec{j} - 367\vec{k}) \text{ N}$$

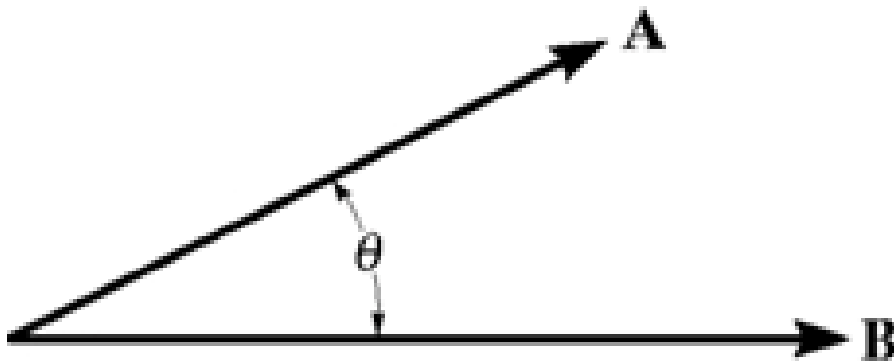
# Produto Escalar

- Em determinados problemas de estática é necessário se determinar o ângulo formado entre duas retas ou então os componentes paralelo e perpendicular de uma força em relação a um eixo.
- Principalmente em problemas tridimensionais, a solução por trigonometria torna-se complicada, dessa forma uma maneira rápida de se obter o resultado desejado é a partir da álgebra vetorial.
- O método que pode ser utilizado é o produto escalar entre dois vetores.

# Formulação do Produto Escalar

- O produto escalar de dois vetores fornece como resultado um escalar e não um vetor e é definido conforme a equação mostrada a seguir.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta$$



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

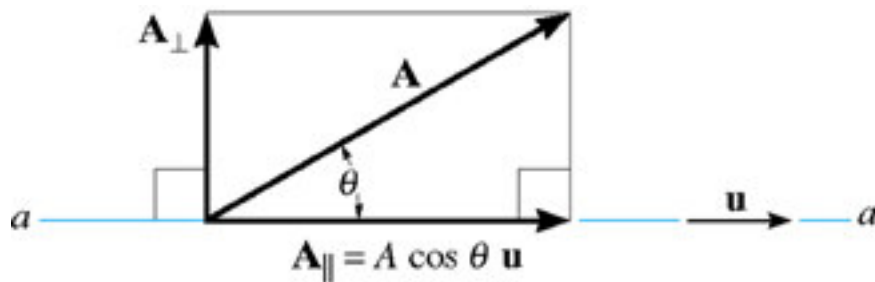
$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

Ângulo entre dois Vetores:

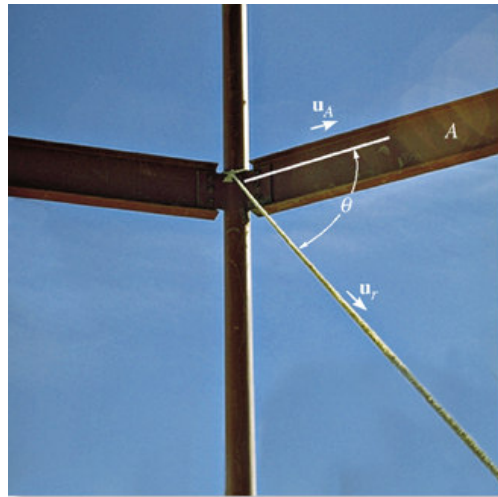
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}\right)$$

# Componentes Paralelo e Perpendicular de um Vetor



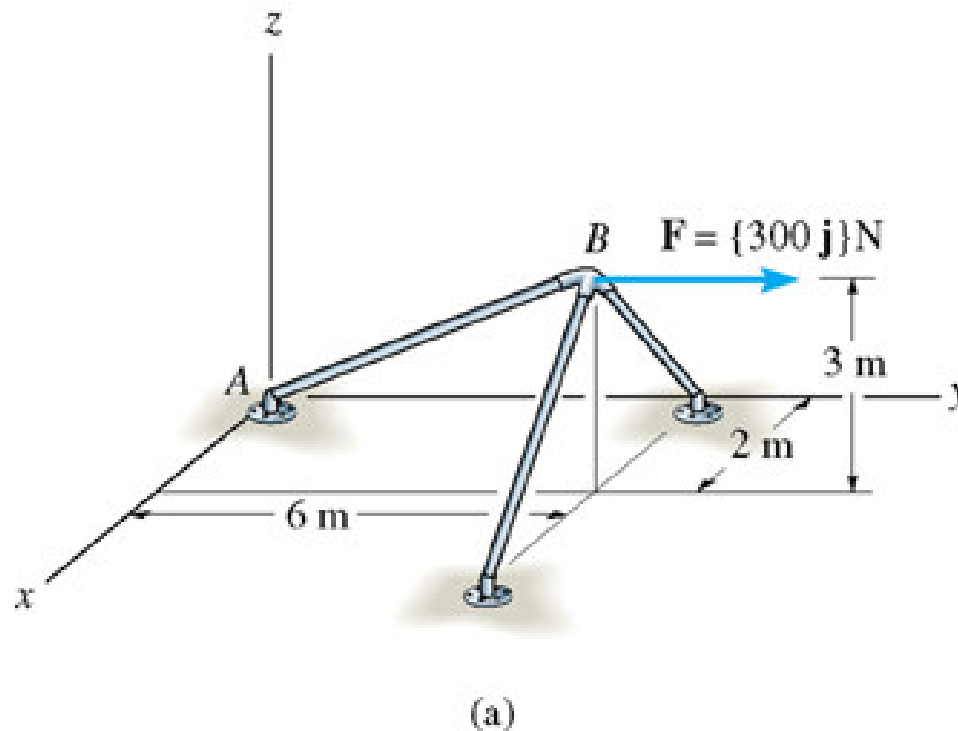
$$A_{\parallel} = A \cdot \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{u}$$

$$A_{\perp} = \sqrt{A^2 - A_{\parallel}^2}$$

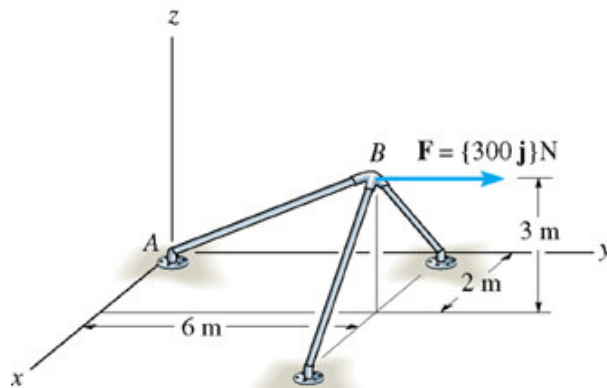


## Exercício 3

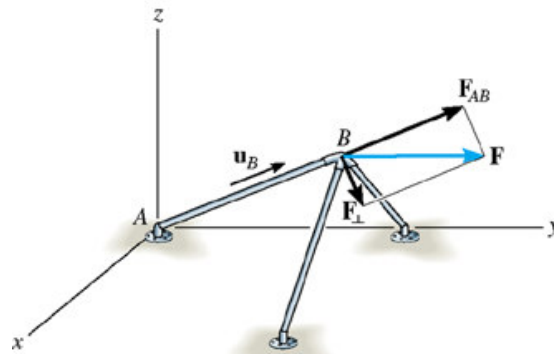
- 3) A estrutura mostrada na figura está submetida a uma força horizontal. Determine a intensidade dos componentes dessa força paralela e perpendicular ao elemento  $AB$ .



# Solução do Exercício 3



(a)



(b)

Força Paralela a Barra  $AB$ :

$$F_{//AB} = F \cdot \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_{AB}$$

Cálculo do Vetor Unitário  $AB$ :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

Vetor Posição  $AB$ :

$$\vec{r}_{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do Posição  $AB$ :

$$r_{AB} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$r_{AB} = 7 \text{ m}$$



# Solução do Exercício 3

Cálculo do Vetor Unitário  $AB$ :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} \quad \longrightarrow \quad \vec{u}_{AB} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0,286\vec{i} + 0,857\vec{j} + 0,429\vec{k}$$

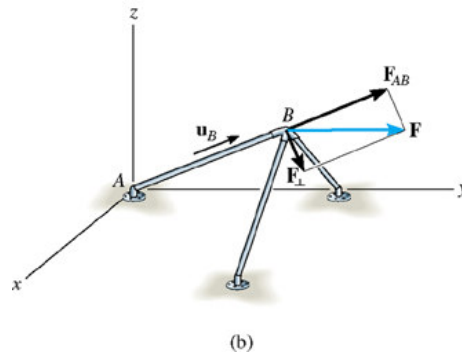
Força Paralela a Barra  $AB$ :

$$F_{//AB} = F \cdot \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$F_{//AB} = (300\vec{j}) \cdot (0,286\vec{i} + 0,857\vec{j} + 0,429\vec{k})$$

$$F_{//AB} = (0 \cdot 0,286) + (300 \cdot 0,857) + (0 \cdot 0,429)$$

$$F_{//AB} = 257,1\text{N}$$



Vetor Força Paralela a Barra  $AB$ :

$$\vec{F}_{//AB} = F_{//AB} \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F}_{//AB} = 257,1 \cdot (0,286\vec{i} + 0,857\vec{j} + 0,429\vec{k})$$

$$\vec{F}_{//AB} = (73,5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k})\text{N}$$

Força Perpendicular a Barra  $AB$ :

$$\vec{F}_{\perp AB} = \vec{F} - \vec{F}_{//AB}$$

$$\vec{F}_{\perp AB} = (300\vec{j}) - (73,5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k})$$

$$\vec{F}_{\perp AB} = (-73,5\vec{i} + 80\vec{j} - 110\vec{k})\text{N}$$

Em Módulo:

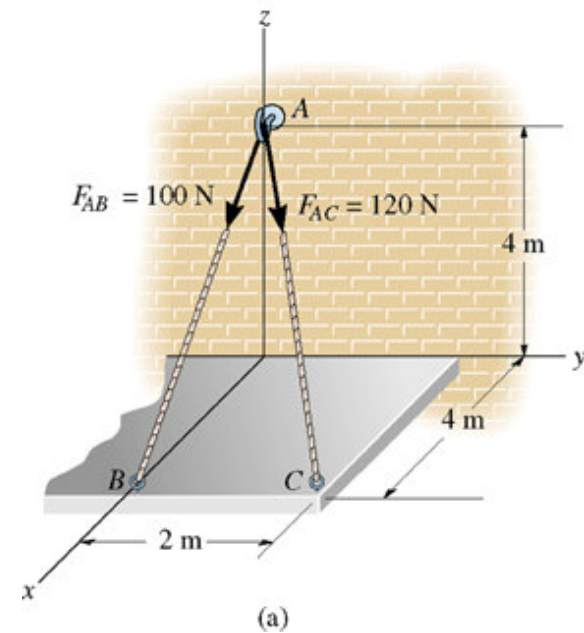
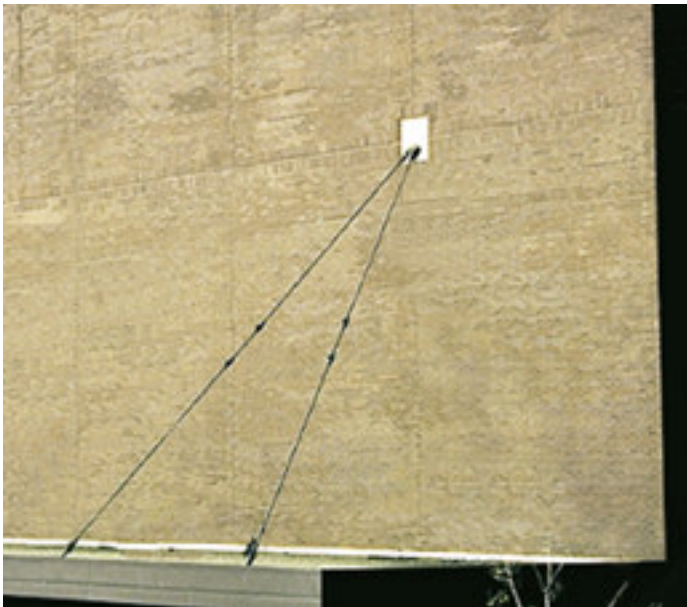
$$F_{\perp AB} = \sqrt{F^2 + F_{//AB}^2}$$

$$F_{\perp AB} = \sqrt{300^2 + 257,1^2}$$

$$F_{\perp AB} = 155\text{N}$$

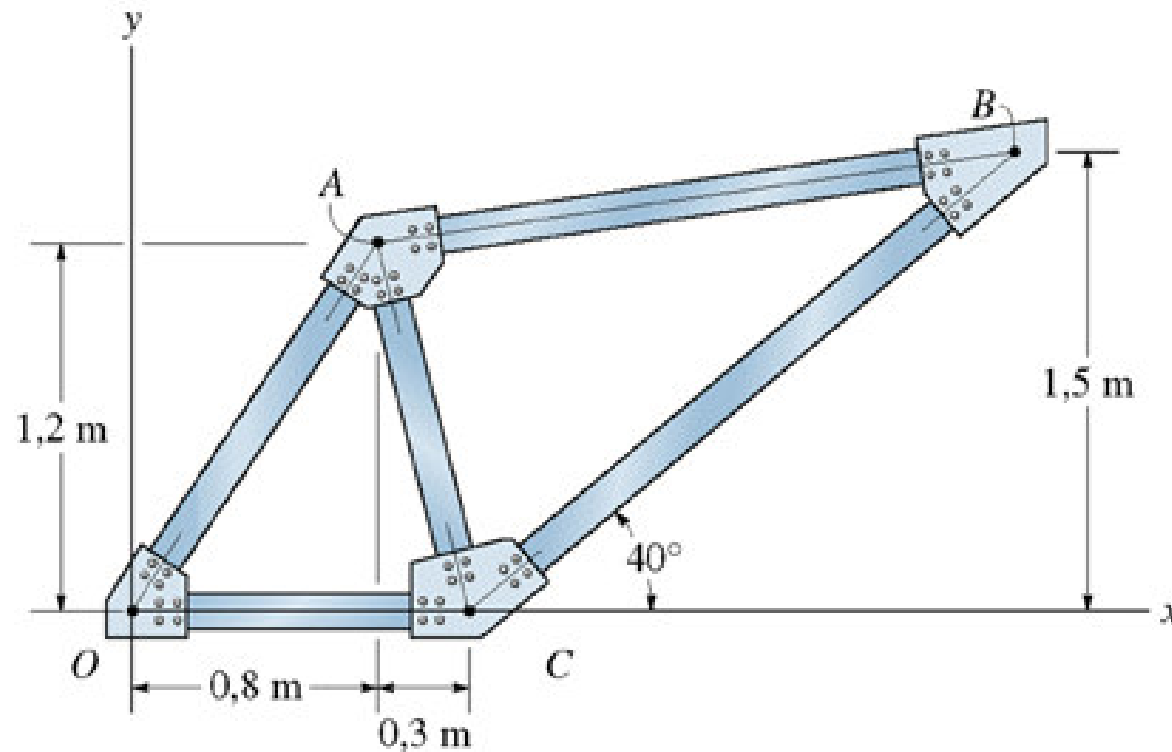
# Exercícios Propostos

- 1) A cobertura é suportada por cabos como mostrado. Determine a intensidade da força resultante que atua em  $A$ .



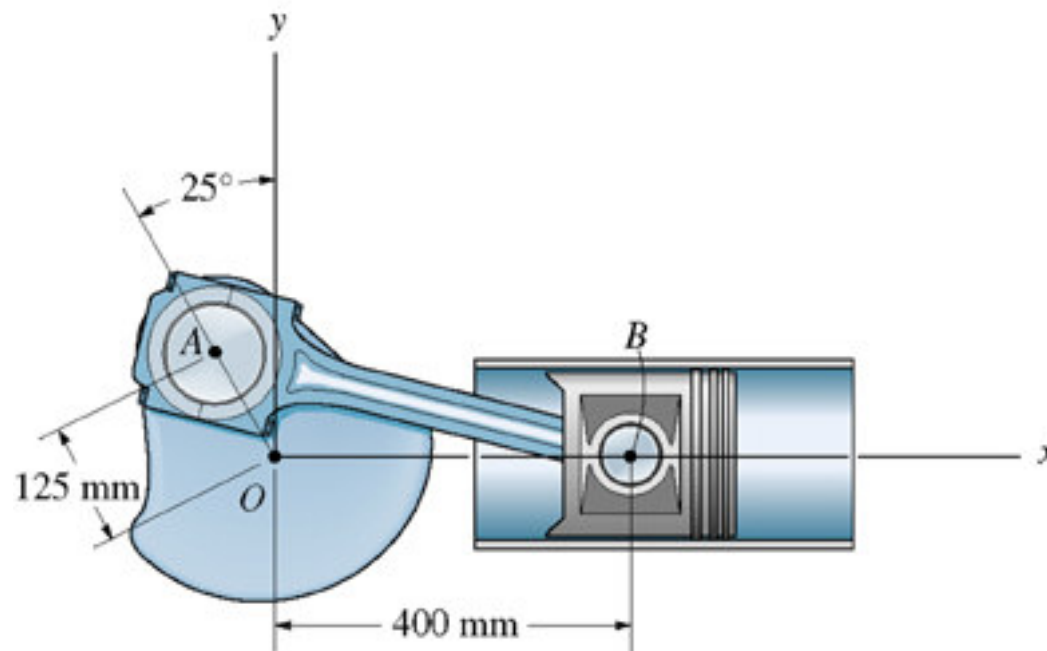
# Exercícios Propostos

- 2) Determine o comprimento do elemento  $AB$  da treliça.



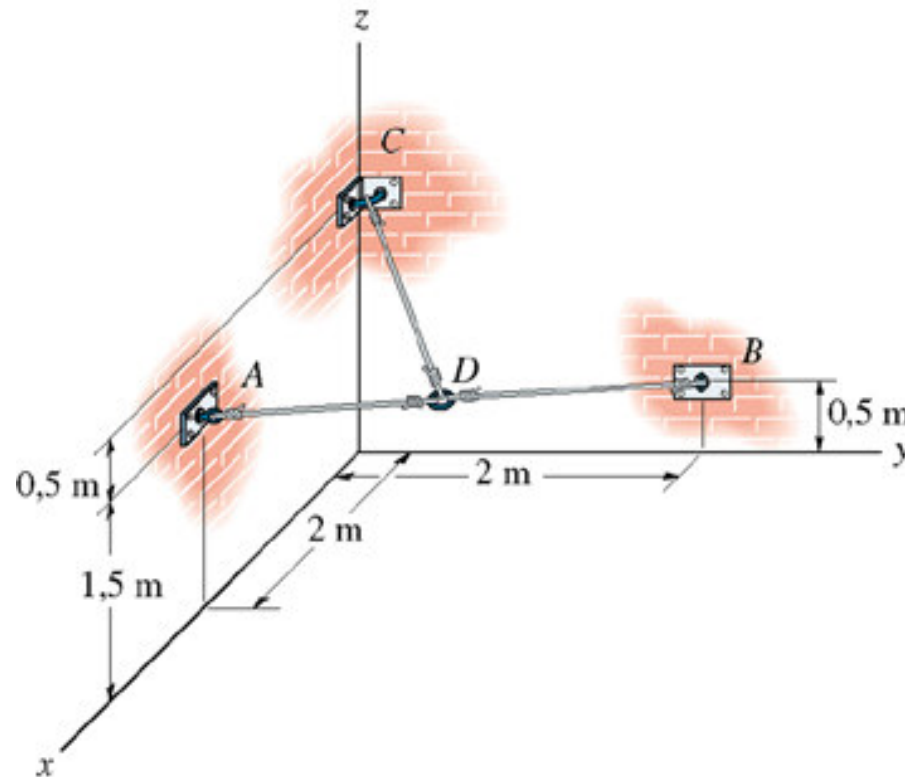
# Exercícios Propostos

- 3) Determine o comprimento do elemento  $AB$  da biela do motor mostrado.



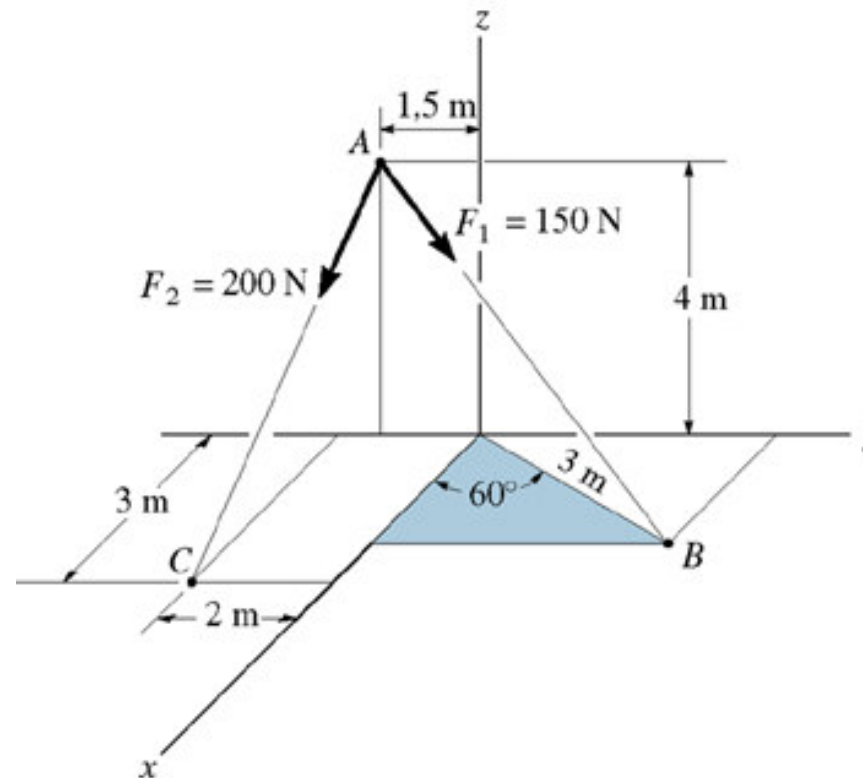
# Exercícios Propostos

- 4) Determine os comprimentos dos arames  $AD$ ,  $BD$  e  $CD$ . O anel  $D$  está no centro entre  $A$  e  $B$ .



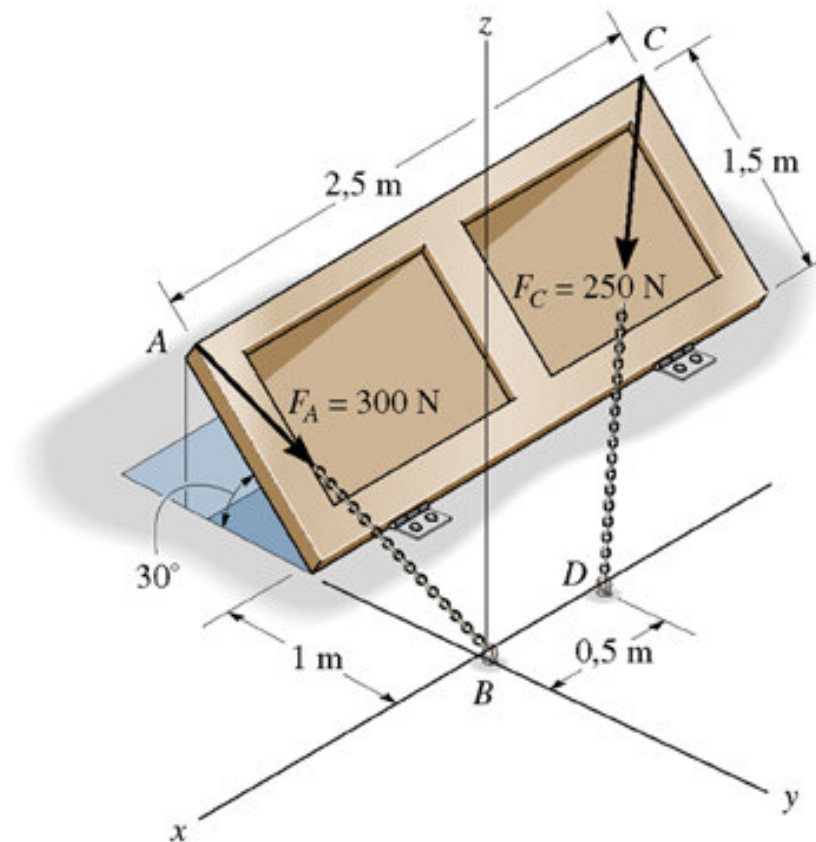
# Exercícios Propostos

- 5) Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o ponto A.



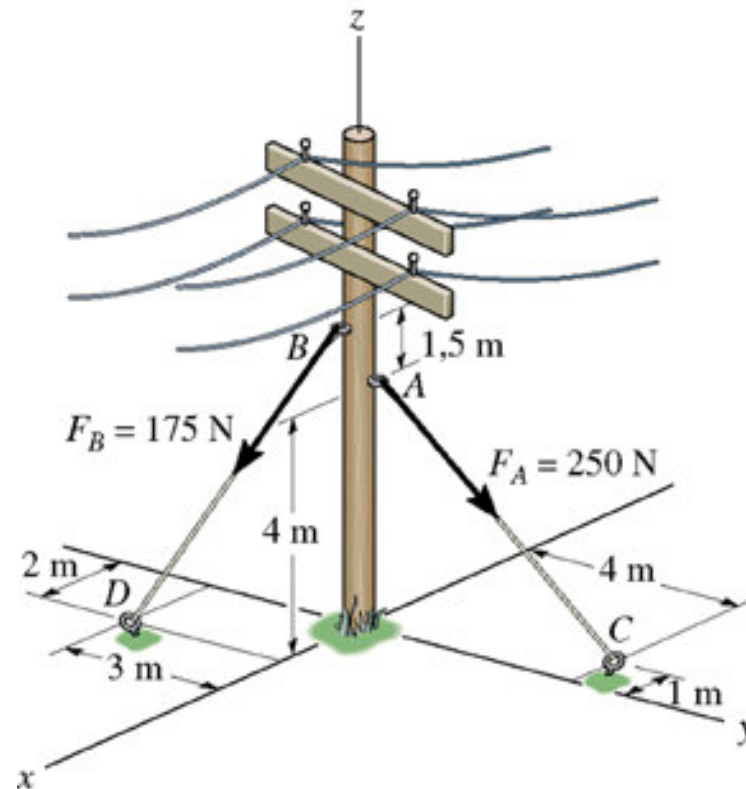
# Exercícios Propostos

- 6) A porta é mantida aberta por meio de duas correntes. Se a tensão em  $AB$  e  $CD$  for  $F_{AB} = 300\text{N}$  e  $F_{CD} = 250\text{N}$ , expresse cada uma dessas forças como um vetor cartesiano.



# Exercícios Propostos

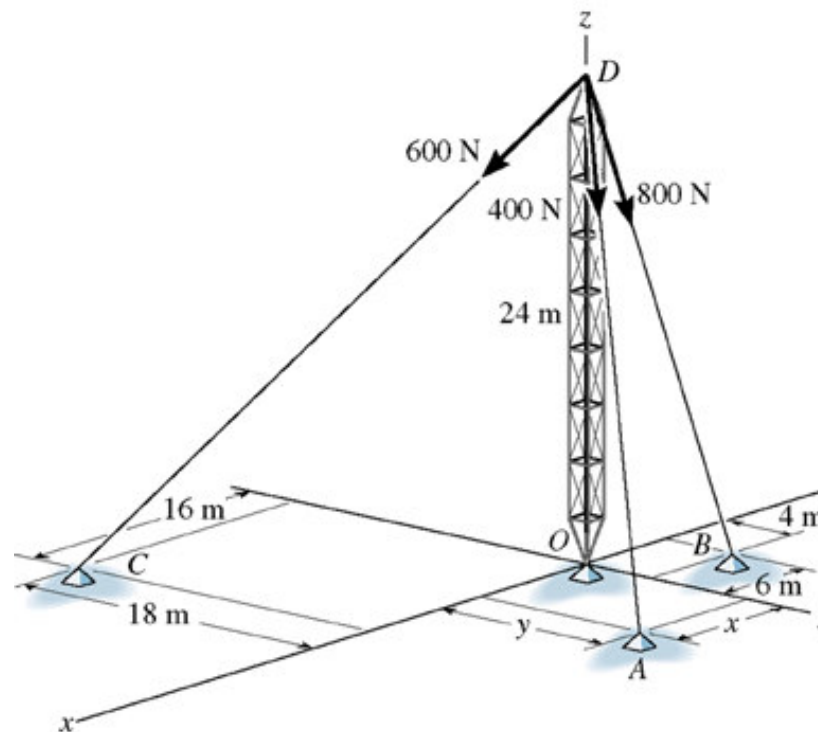
- 7) Os cabos de tração são usados para suportar o poste de telefone. Represente a força em cada cabo como um vetor cartesiano.





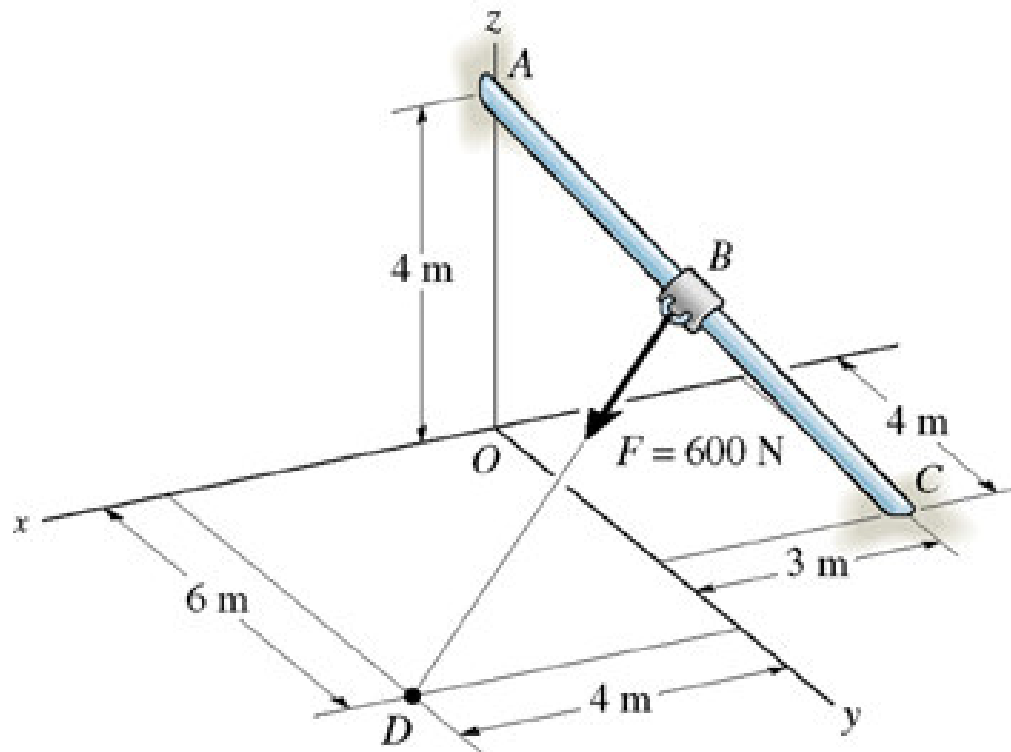
# Exercícios Propostos

- 8) A torre é mantida reta pelos três cabos. Se a força em cada cabo que atua sobre a torre for aquela mostrada na figura, determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante. Considere  $x = 20\text{m}$  e  $y = 15\text{m}$ .



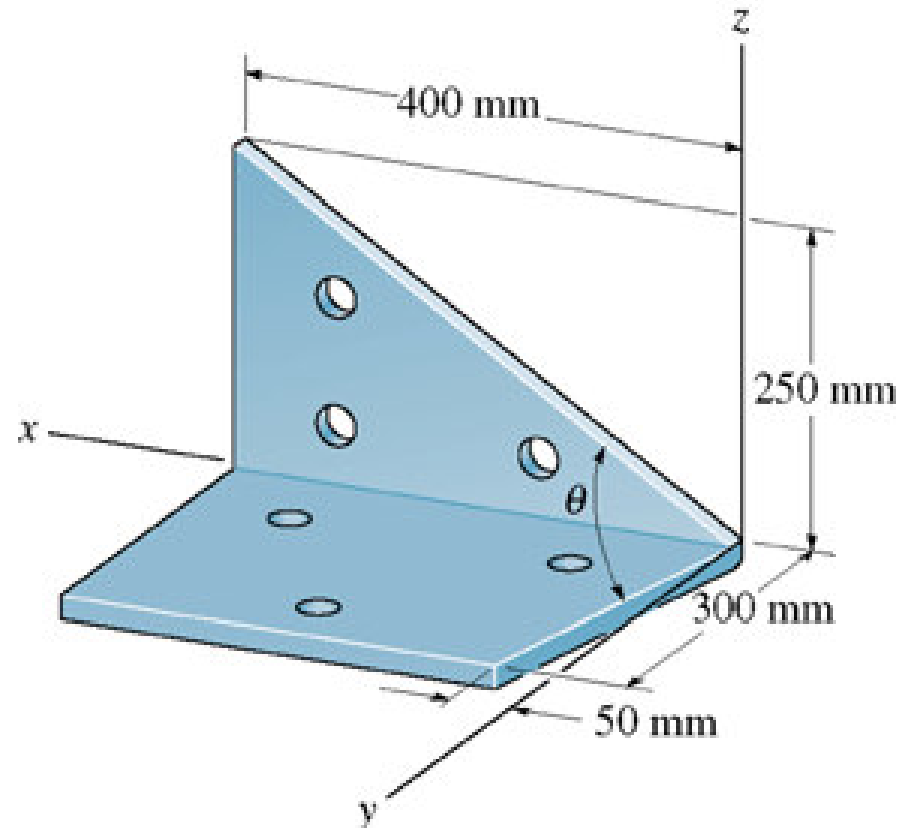
# Exercícios Propostos

- 9) Determine os componentes de  $F$  paralelo e perpendicular a barra  $AC$ . O ponto  $B$  está no ponto médio de  $AC$ .



# Exercícios Propostos

- 10) Determine o ângulo  $\theta$  mostrado na figura a seguir.



# Próxima Aula

- Equilíbrio do Ponto Material.
- Diagrama de Corpo Livre.
- Equações de Equilíbrio.
- Equilíbrio de Sistemas Bidimensionais.