Mecânica Técnica

Aula 4 – Adição e Subtração de Vetores Cartesianos

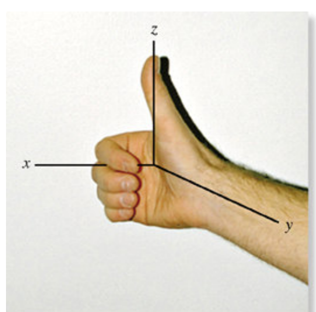
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

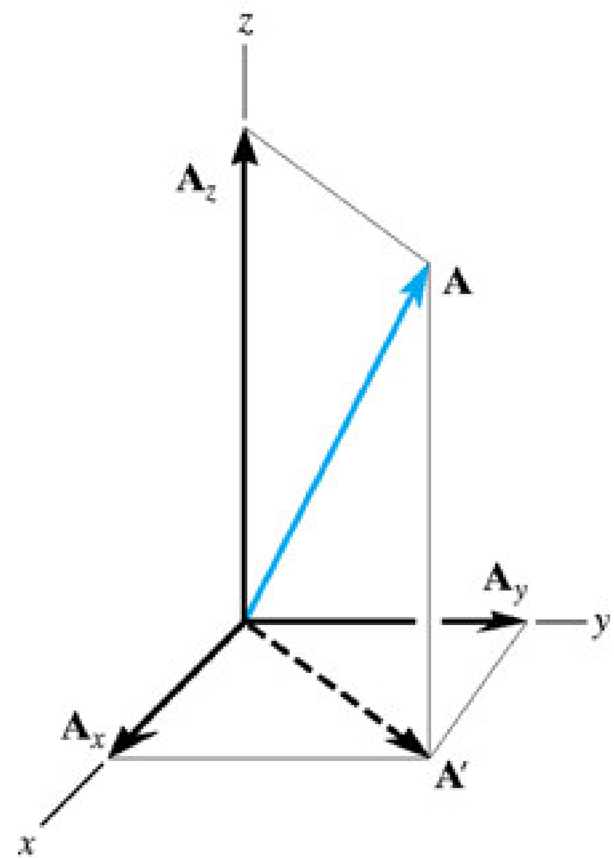
- Operações com Vetores Cartesianos.
- Vetor Unitário.
- Ângulos Diretores Coordenados.

Componentes retangulares de um vetor

- Um vetor ***A*** pode ter um, dois ou três componentes ao longo dos eixos de coordenadas *x*, *y* e *z*.
- A quantidade de componentes depende de como o vetor está orientado em relação a esses eixos.
- Sistema de coordenadas utilizando a regra da mão direita.

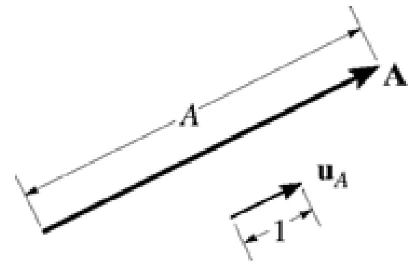


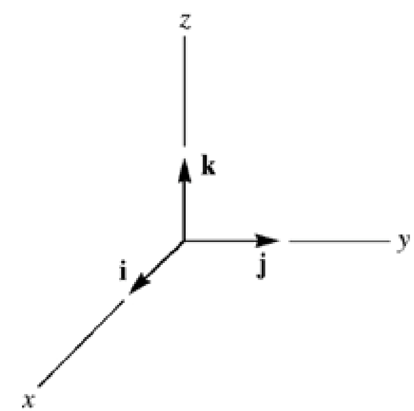
Sistema de coordenadas da mão direita



Vetor Unitário

- A direção de ***A*** é especificada usando-se um vetor unitário, que possui esse nome por ter intensidade igual a 1.
- Em três dimensões, o conjunto de vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ é usado para designar as direções dos eixos *x*, *y* e *z* respectivamente.





Para um vetor A:

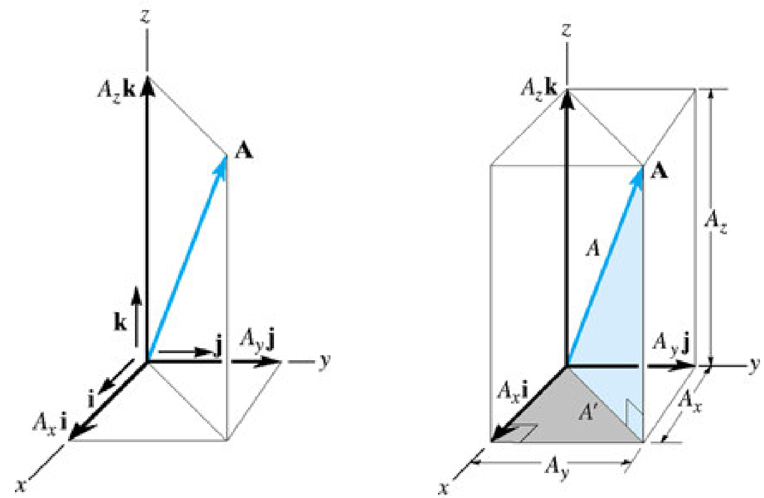
$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

Para um vetor Força:

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$

Representação de um Vetor Cartesiano

- Um vetor cartesiano é escrito sob a forma de suas componentes retangulares.
- As componentes representam a projeção do vetor em relação aos eixos de referência.
- Quando se escreve um vetor na forma cartesiana suas componentes ficam separadas em cada um dos eixos e facilita a solução da álgebra vetorial.



Vetor cartesiano:

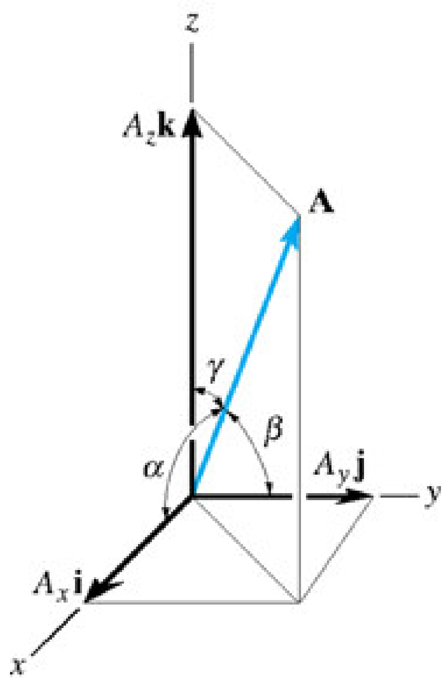
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

Módulo do vetor cartesiano:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Ângulos Diretores Coordenados

- A orientação de um vetor no espaço é definida pelos ângulos diretores coordenados α, β, e γ medidos entre a origem do vetor e os eixos positivos x, y e z.

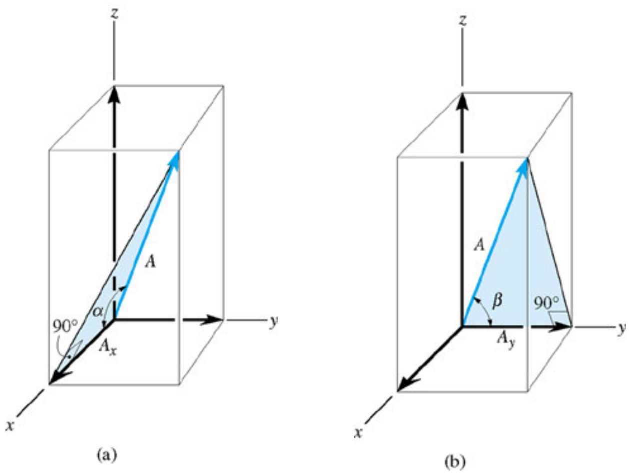


$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}_x}{A}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{A}_y}{A}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A}_z}{A}$$

Determinação dos Ângulos Diretores Coordenados



$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\vec{i} + \frac{A_y}{A}\vec{j} + \frac{A_z}{A}\vec{k}$$

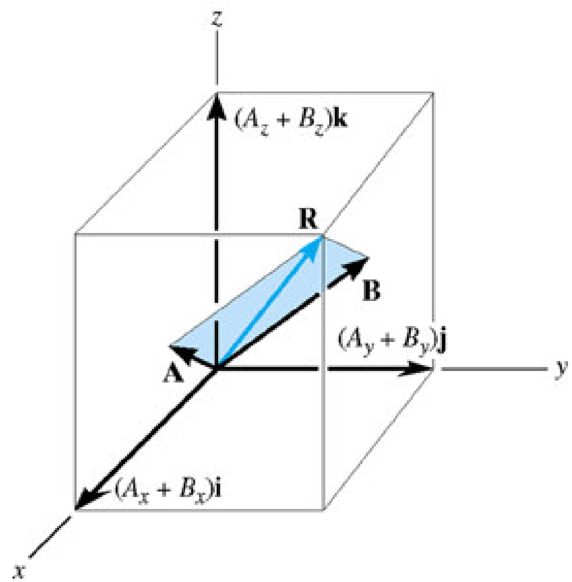
$$\vec{u}_A = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Sistemas de Forças Concorrentes

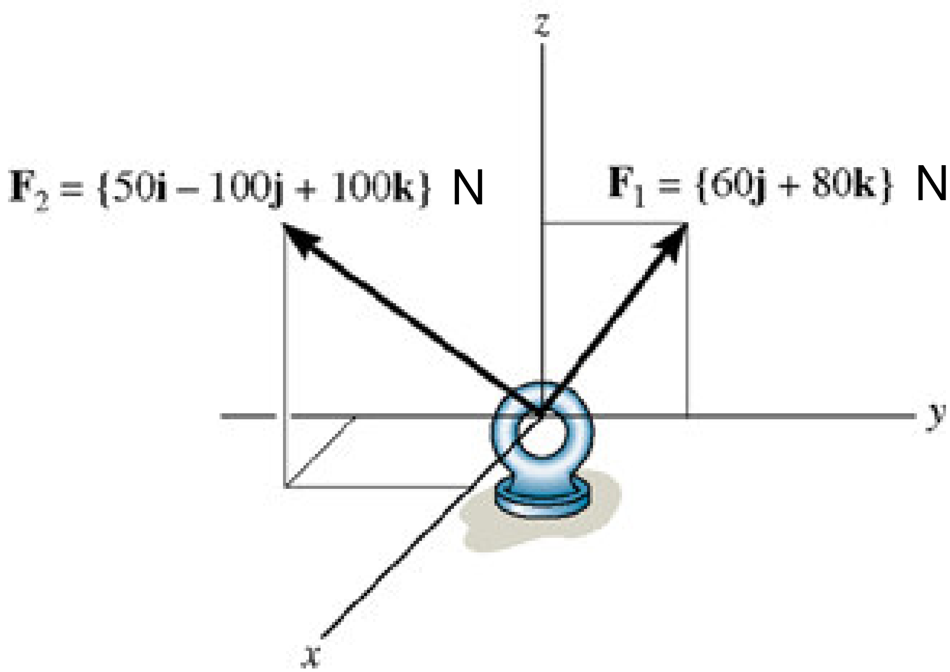
- Se o conceito de soma vetorial for aplicado em um sistema de várias forças concorrentes, a força resultante será a soma de todas as forças do sistema e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$



Exercício 1

- 1) Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o anel, conforme mostrado na figura.



(a)

Solução do Exercício 1

Vetor força resultante:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

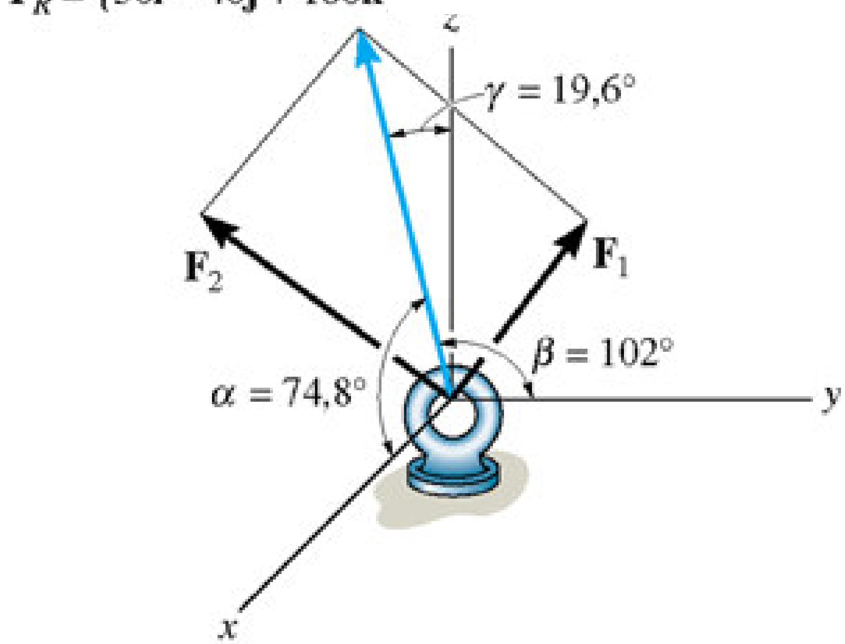
$$\vec{F}_R = (50\vec{i} - 100\vec{j} + 100\vec{k}) + (60\vec{j} + 80\vec{k})$$

$$\vec{F}_R = (50\vec{i} - 40\vec{j} + 180\vec{k})\text{ N}$$

Módulo da força resultante:

$$F_R = \sqrt{50^2 + 40^2 + 180^2}$$

$$F_R = 191\text{ N}$$



(b)

Solução do Exercício 1

Vetor unitário da força resultante:

$$\vec{u}_{F_R} = \frac{\vec{F}_R}{F_R} = \frac{F_{Rx}}{F_R}\vec{i} + \frac{F_{Ry}}{F_R}\vec{j} + \frac{F_{Rz}}{F_R}\vec{k}$$

$$\vec{u}_{F_R} = \frac{50}{191}\vec{i} - \frac{40}{191}\vec{j} + \frac{180}{191}\vec{k}$$

$$\vec{u}_{F_R} = 0{,}261\vec{i} - 0{,}209\vec{j} + 0{,}942\vec{k}$$

Ângulos diretores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{F}_{Rx}}{F_R} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}261$$

$$\alpha = \arccos(0{,}261) \Rightarrow \alpha = 74{,}8°$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{F}_{Ry}}{F_R}$$

$$\cos\beta = -0{,}209$$

$$\beta = \arccos(-0{,}209) \Rightarrow \beta = 102°$$

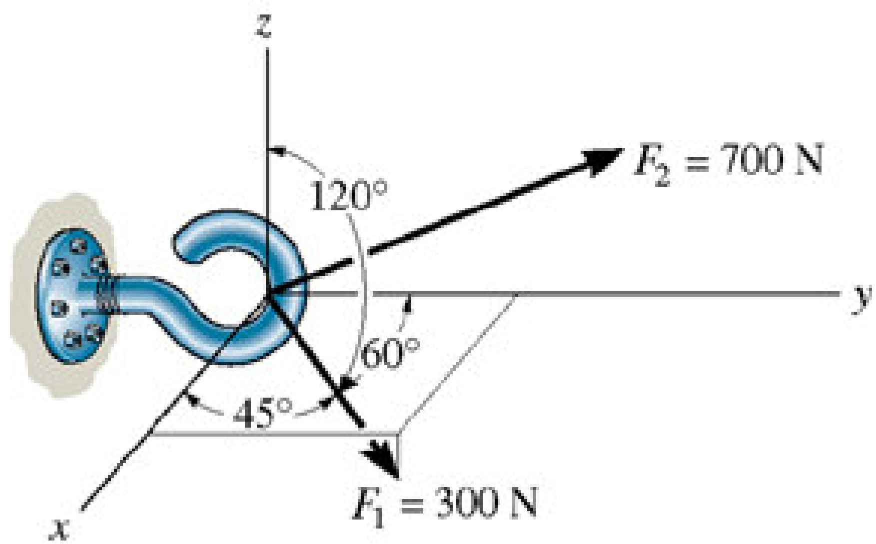
$$\cos\gamma = \frac{\vec{F}_{Rz}}{F_R}$$

$$\cos\gamma = 0{,}942$$

$$\gamma = \arccos(0{,}942) \Rightarrow \gamma = 19{,}6°$$

Exercício 2

- 2) Duas forças atuam sobre o gancho mostrado na figura. Especifique os ângulos diretores coordenados de F_2, de modo que a força resultante F_R atue ao longo do eixo y positivo e tenha intensidade de 800N.



(a)

Solução do Exercício 2

Força Resultante:

$$\vec{F}_R = 800\vec{j} \text{ N}$$

Determinação de F_1:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \cos\alpha_1 \vec{i} + F_1 \cdot \cos\beta_1 \vec{j} + F_1 \cdot \cos\gamma_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = 300 \cdot \cos 45° \vec{i} + 300 \cdot \cos 60° \vec{j} + 300 \cdot \cos 120° \vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = 212{,}2\vec{i} + 150\vec{j} - 150\vec{k} \text{ N}$$

Determinação de F_2:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$800\vec{j} = 212{,}2\vec{i} + 150\vec{j} - 150\vec{k} + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = 800\vec{j} - 212{,}2\vec{i} - 150\vec{j} + 150\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = -212{,}2\vec{i} + 650\vec{j} + 150\vec{k} \text{ N}$$

Módulo de F_2:

$$F_2 = \sqrt{212{,}2^2 + 650^2 + 150^2}$$

$$F_2 = 700 \text{ N}$$

Solução do Exercício 2

Ângulos Diretores de ***F₂***:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{F_{2x}}{F_2}\right)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{-212{,}2}{700}\right)$$

$$\alpha_2 = 108°$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{F_{2y}}{F_2}\right)$$

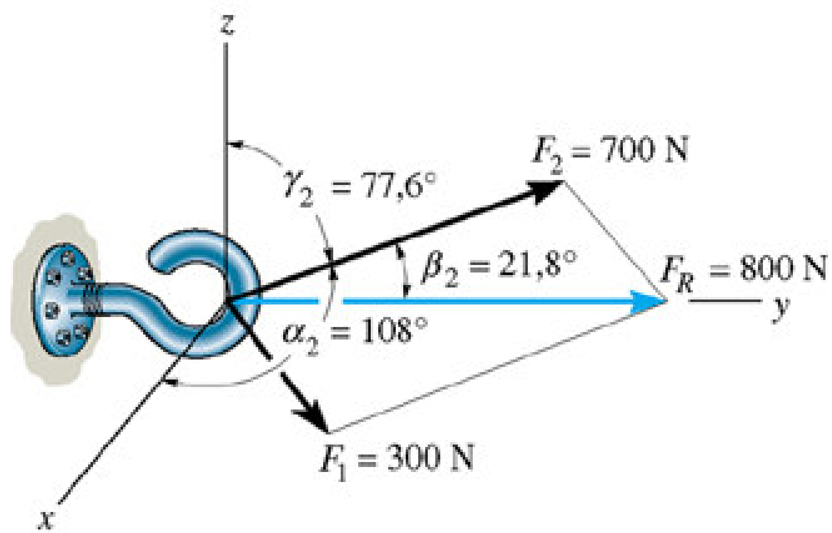
$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{650}{700}\right)$$

$$\beta_2 = 21{,}8°$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{F_{2z}}{F_2}\right)$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{150}{700}\right)$$

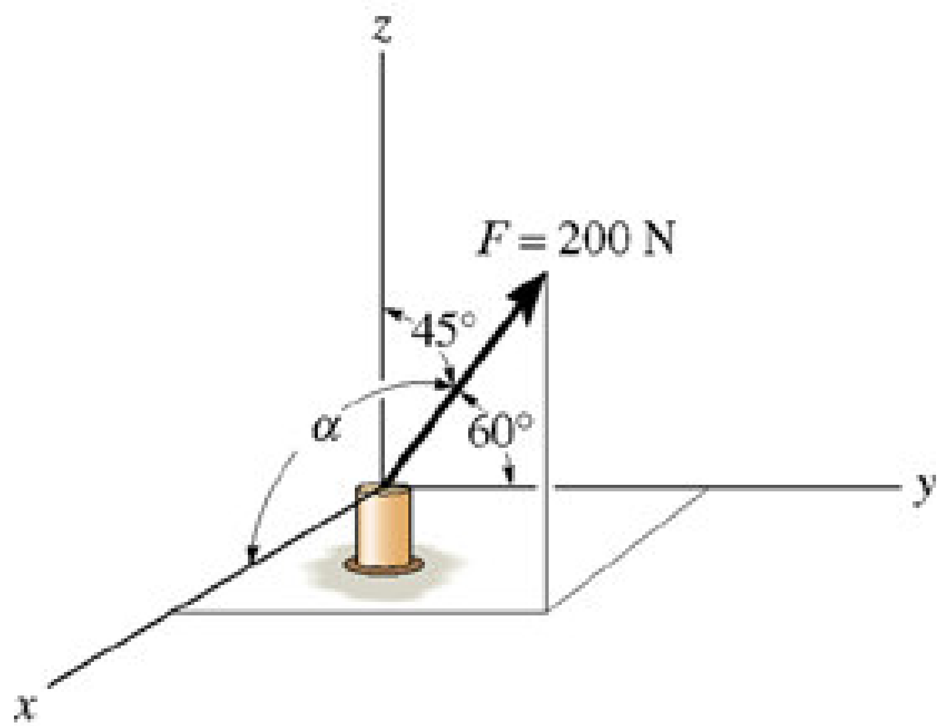
$$\gamma_2 = 77{,}6°$$



(b)

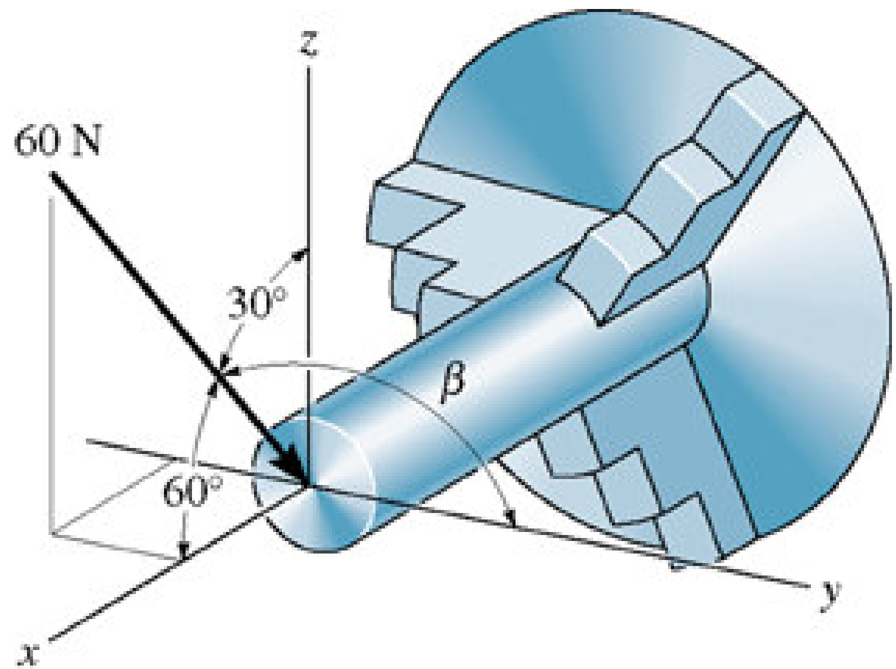
Exercícios Propostos

- 1) Expresse a força *F* como um vetor cartesiano.



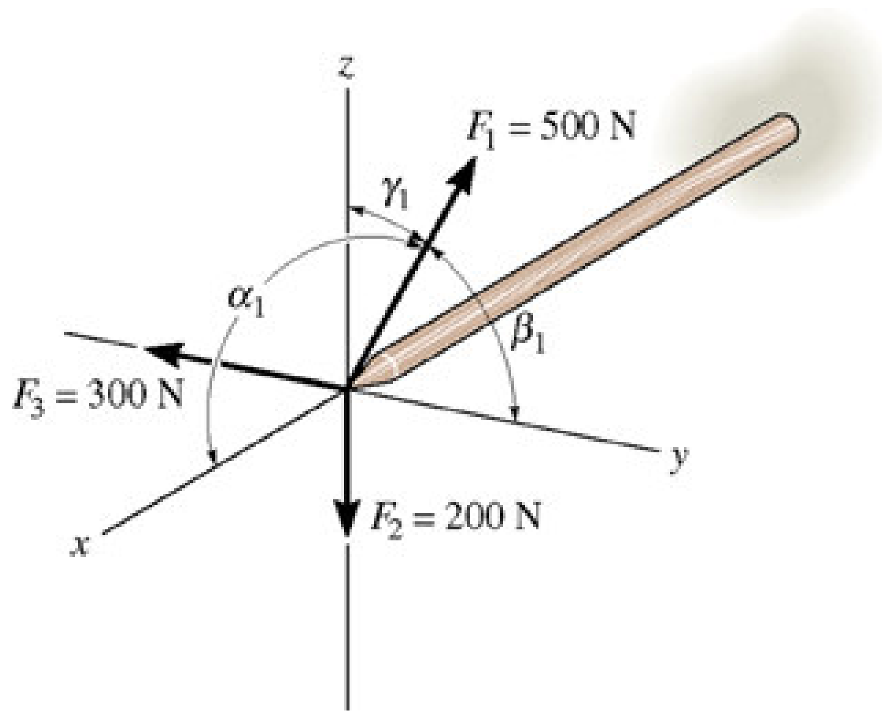
Exercícios Propostos

- 2) A peça montada no torno está sujeita a uma força de 60N. Determine o ângulo de direção β e expresse a força como um vetor cartesiano.



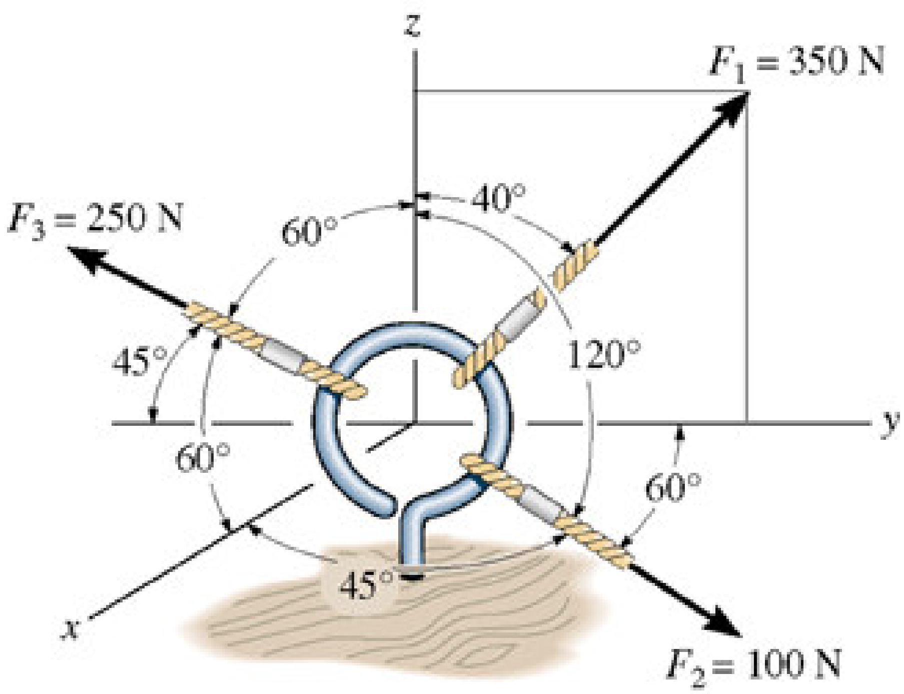
Exercícios Propostos

- 3) O mastro está sujeito as três forças mostradas. Determine os ângulos diretores α_1, β_1, e γ_1 de F_1, de modo que a força resultante que atua sobre o mastro seja $\vec{F}_R = (350\vec{i}\,)$ N



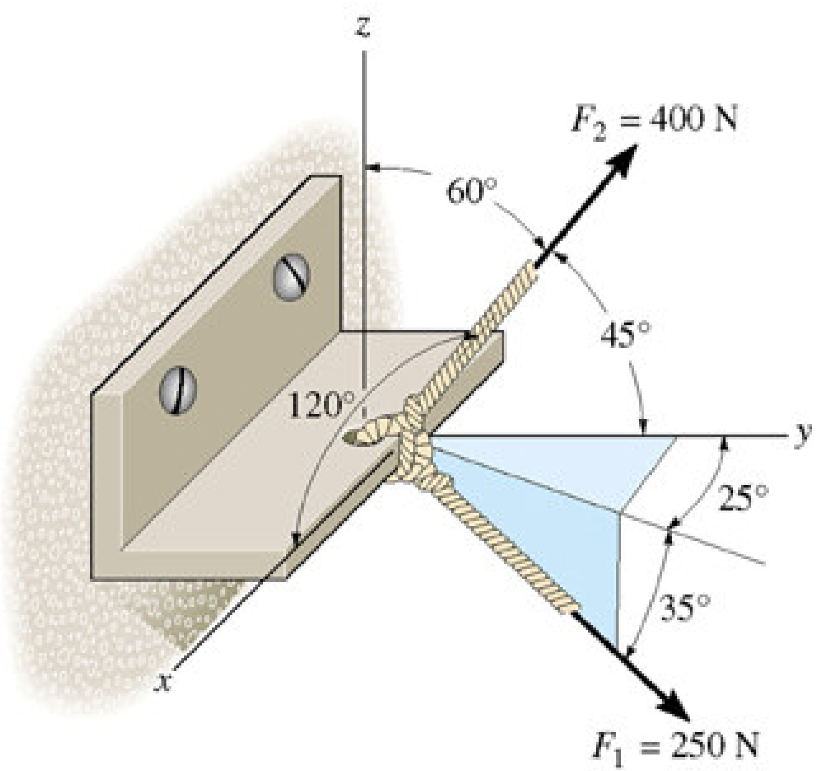
Exercícios Propostos

- 4) Os cabos presos ao olhal estão submetidos as três forças mostradas. Expresse cada força na forma vetorial cartesiana e determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante.



Exercícios Propostos

- 5) O suporte está sujeito as duas forças mostradas. Expresse cada força como um vetor cartesiano e depois determine a força resultante, a intensidade e os ângulos coordenados diretores dessa força.



Próxima Aula

- Vetores Posição.
- Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta.
- Produto Escalar Aplicado na Mecânica.