INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 2 – Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Cálculo de Força Resultante.
- Operações Vetoriais.
- Lei dos Senos.
- Lei dos Cossenos.

Grandezas Escalares

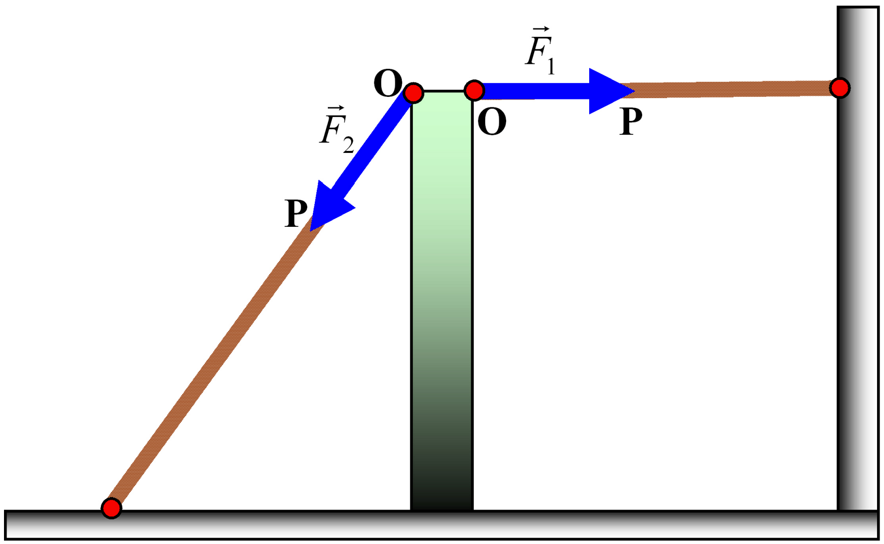
- Uma grandeza escalar é caracterizada por um número real. Como exemplo de escalares podem se citar: o tempo, a massa, o volume, o comprimento, etc.

Grandezas Vetoriais

- Uma grandeza vetorial é caracterizada pela dependência de três elementos fundamentais, ou seja, representa um ente matemático que possui intensidade, direção e sentido. Em problemas de estática é muito comum a utilização de grandezas vetoriais como posição, força e momento.
- A posição de um ponto no espaço em relação a outro ponto caracteriza uma grandeza vetorial. Para descrever a posição de uma cidade **A** em relação à outra cidade **B**, é insuficiente dizer que ambas estão separadas por uma distância de 100 km, para se caracterizar um vetor, deve-se dizer por exemplo, que a cidade **B** se encontra 100 km a oeste da cidade **A**.
- A força também é caracterizada como uma grandeza vetorial, pois quando se empurra uma peça de móvel através do chão aplica-se na mesma uma força com intensidade suficiente para mover o móvel e com a direção desejada para o movimento.

Representação de uma Grandeza Vetorial

- Uma grandeza vetorial pode ser representada graficamente por uma seta, que é utilizada para definir seu módulo, sua direção e seu sentido. Graficamente o módulo de um vetor é representado pelo comprimento da seta, a direção é definida através do ângulo formado entre um eixo de referência e a linha de ação da seta e o sentido é indicado pela extremidade da seta.
- A figura mostra a representação gráfica de dois vetores força atuando ao longo dos cabos de fixação de um poste, o ponto **O** é chamado de origem do vetor e o ponto **P** representa sua extremidade ou ponta.

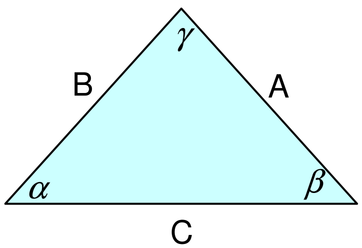


Solução Escalar

- Praticamente todos os problemas envolvendo os conceitos de soma e subtração vetorial, bem como a determinação das componentes de um vetor podem ser resolvidos a partir das leis dos senos e dos cossenos, que representam propriedades fundamentais da trigonometria e são descritas a seguir a partir da figura a seguir e das respectivas equações.

Lei dos Senos e dos Cossenos

- Dado um triângulo ABC e seus ângulos internos α, β e γ, a lei dos senos é definida da seguinte forma: “Em todo triângulo, as medidas dos seus lados são proporcionais aos senos dos lados opostos”.



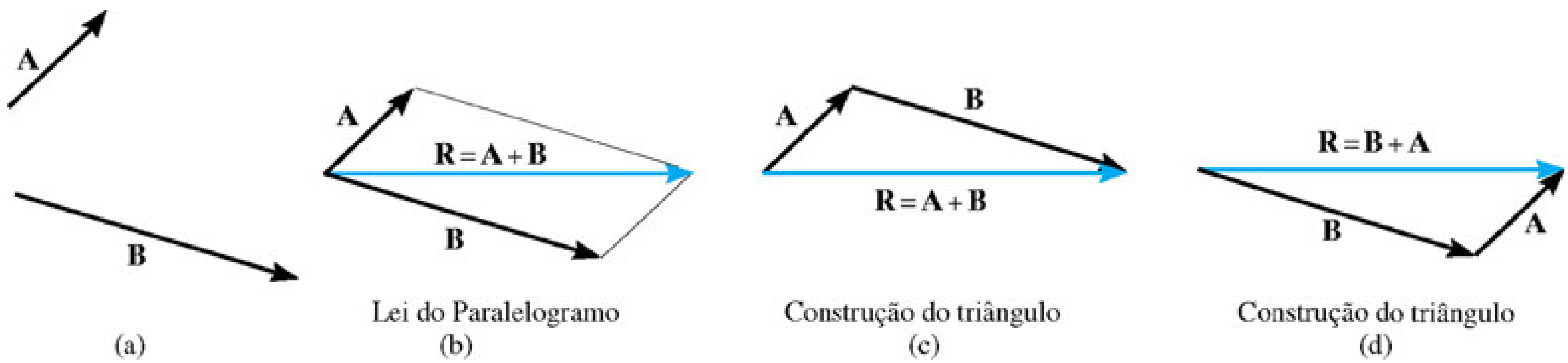
$$\frac{A}{sen\alpha} = \frac{B}{sen\beta} = \frac{C}{sen\gamma}$$

- A partir do mesmo triângulo ABC e seus ângulos internos α, β e γ, a lei dos cossenos é definida do seguinte modo: “Num triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado”.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$$

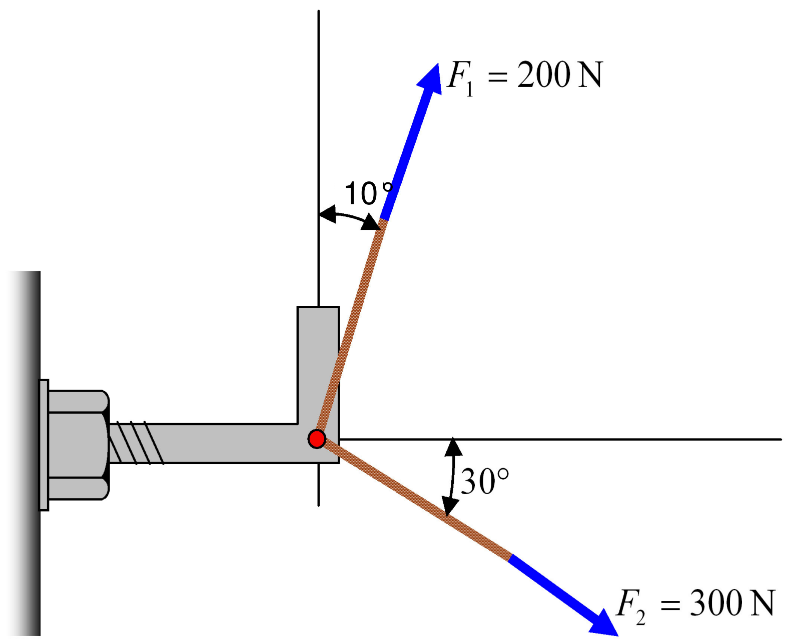
Soma Vetorial – Regra do Paralelogramo

- O Cálculo da força resultante pode ser obtido através da soma vetorial com a aplicação da regra do paralelogramo.



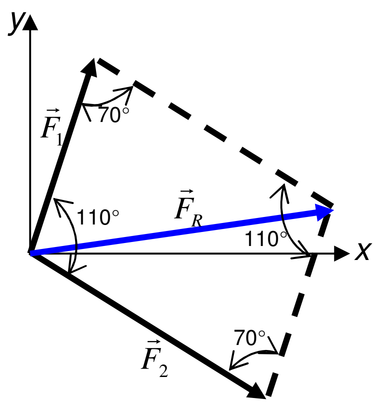
Exercício 1

- 1) O parafuso mostrado na figura está sujeito a duas forças F_1 e F_2. Determine o módulo e a direção da força resultante.

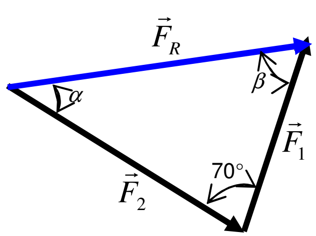


Solução do Exercício 1

Construir um esquema aplicando a regra do paralelogramo de forma a identificar quais são as incógnitas do problema.



A partir do paralelogramo obtido na figura, pode-se construir o triângulo de vetores.



Aplicando-se a lei dos cossenos, determina-se o módulo da força resultante F_R.

$$F_R = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot cos\,\gamma}$$

$$F_R = \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot cos\,70°}$$

$$F_R = 298{,}25 \text{ N}$$

O ângulo α é determinado a partir da lei dos senos, utilizando-se o valor calculado para F_R.

$$\frac{F_1}{sen\alpha} = \frac{F_R}{sen\gamma} \Rightarrow sen\alpha = \frac{F_1 \cdot sen\gamma}{F_R}$$

$$\alpha = asen\left(\frac{F_1 \cdot sen\gamma}{F_R}\right) \Rightarrow \alpha = asen\left(\frac{200 \cdot sen70°}{298{,}25}\right)$$

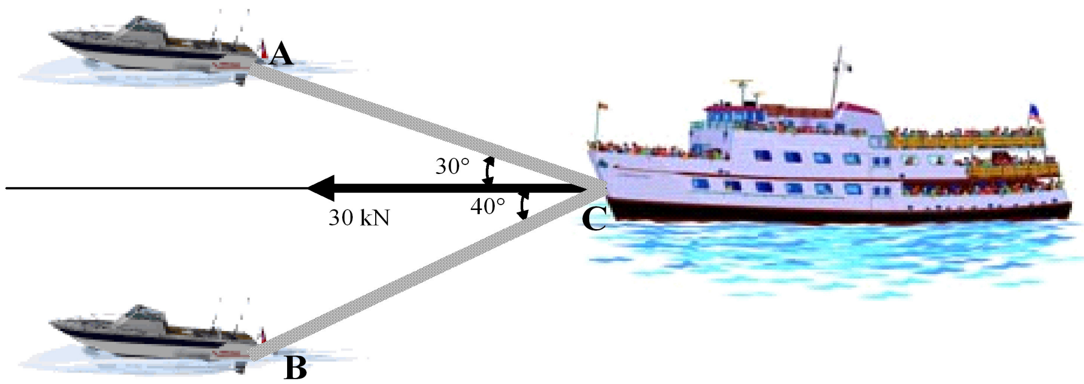
$$\alpha = 39{,}06°$$

Com relação ao eixo x positivo, o ângulo θ é dado por:

$$\theta = \alpha - \delta \Rightarrow \theta = 39{,}06° - 30° \Rightarrow \theta = 9{,}06°$$

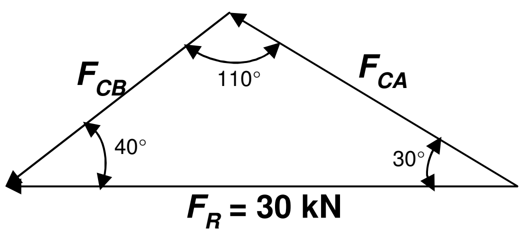
Exercício 2

- 2) Duas lanchas rebocam um barco de passageiros que se encontra com problemas em seus motores. Sabendo-se que a força resultante é igual a 30kN, encontre suas componentes nas direções **AC** e **BC**.



Solução do Exercício 2

A partir da regra do paralelogramo, deve-se construir um triângulo de vetores envolvendo as forças atuantes nos cabos **CA** e **CB** e a força resultante, de forma a identificar as incógnitas do problema.



A partir da aplicação da lei dos senos, pode-se determinar os módulos das forças atuantes em cada um dos cabos **CA** ou **CB** da seguinte forma.

$$\frac{F_R}{sen110°} = \frac{F_{CA}}{sen40°} = \frac{F_{CB}}{sen30°}$$

Resolvendo para F_{CA} tem-se que:

$$F_{CA} = \frac{F_R \cdot sen40°}{sen110°} = \frac{30 \cdot sen40°}{sen110°}$$

$$F_{CA} = 20{,}52\,\text{kN}$$

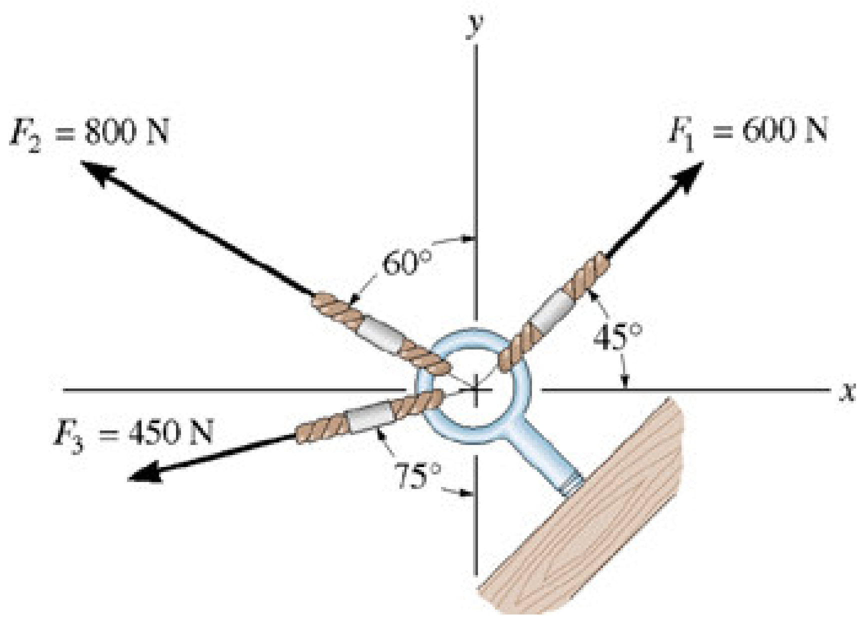
Resolvendo para F_{CB} tem-se que:

$$F_{CB} = \frac{F_R \cdot sen30°}{sen110°} = \frac{30 \cdot sen30°}{sen110°}$$

$$F_{CB} = 15{,}96\,\text{kN}$$

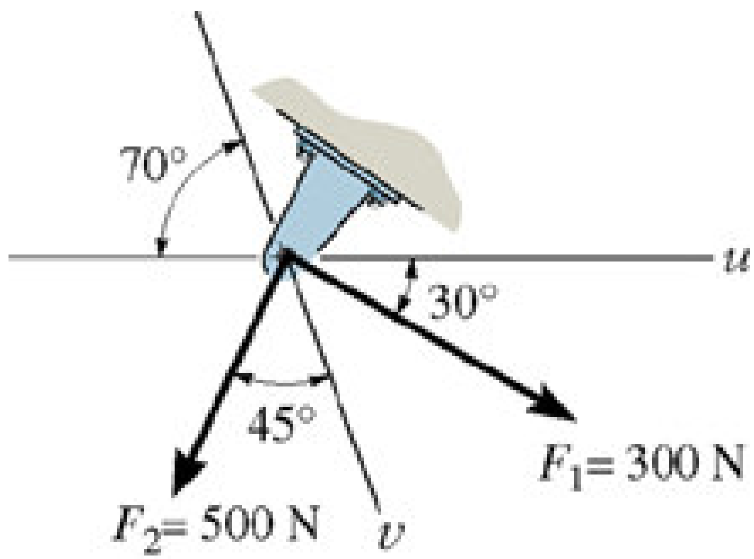
Exercícios Propostos

- 1) Determine a intensidade da força resultante e indique sua direção, medida no sentido anti-horário, em relação ao eixo *x* positivo.



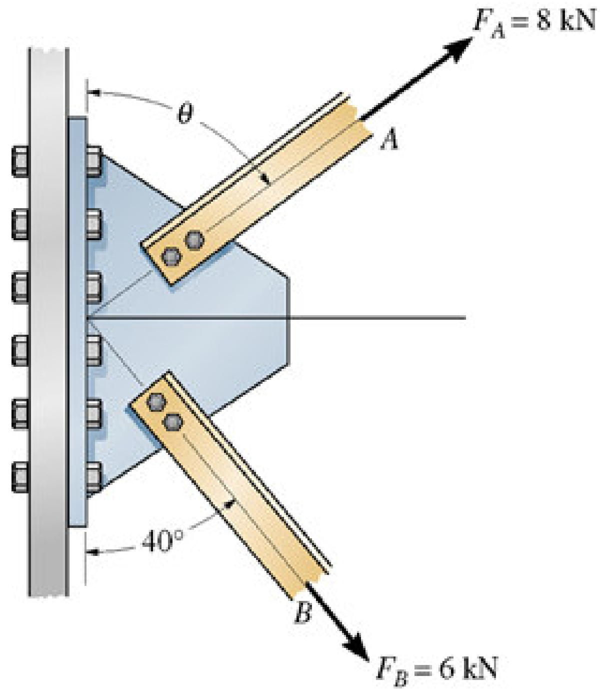
Exercícios Propostos

- 2) Determine a intensidade da força resultante e indique sua direção, medida no sentido anti-horário, em relação ao eixo *u* positivo.



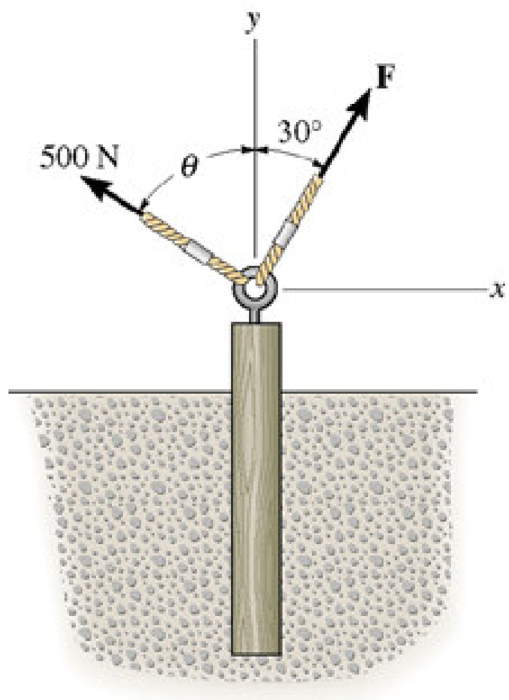
Exercícios Propostos

- 3) A chapa está submetida a duas forças $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$ como mostra a figura. Se θ = 60º, determine a intensidade da força resultante e sua intensidade em relação ao eixo horizontal.



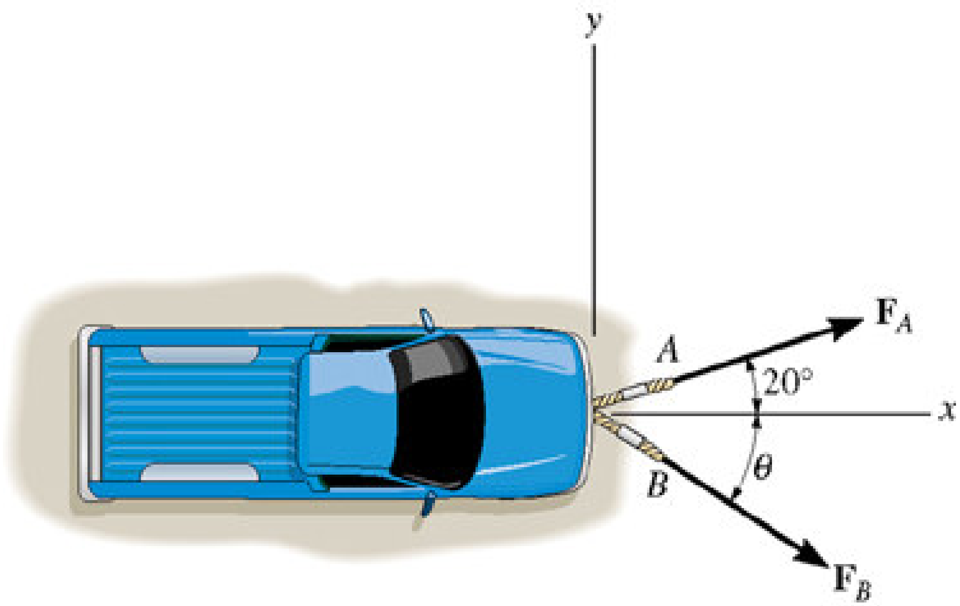
Exercícios Propostos

- 4) Duas forças são aplicadas ao olhal a fim de remover a estaca mostrada. Determine o ângulo θ e o valor da força $\boldsymbol{F}$ de modo que a força resultante seja orientada verticalmente para cima no eixo *y* e tenha uma intensidade de 750N.



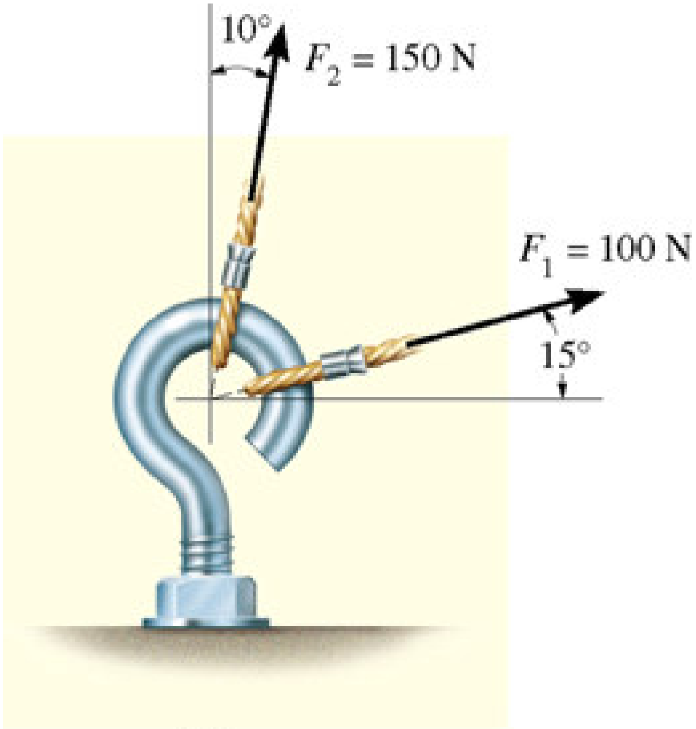
Exercícios Propostos

- 5) A caminhonete mostrada é rebocada por duas cordas. Determine os valores de $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_B$ de modo a produzir uma força resultante de 950N oreintada no eixo x positivo, considere $\theta = 50º$.



Exercícios Propostos

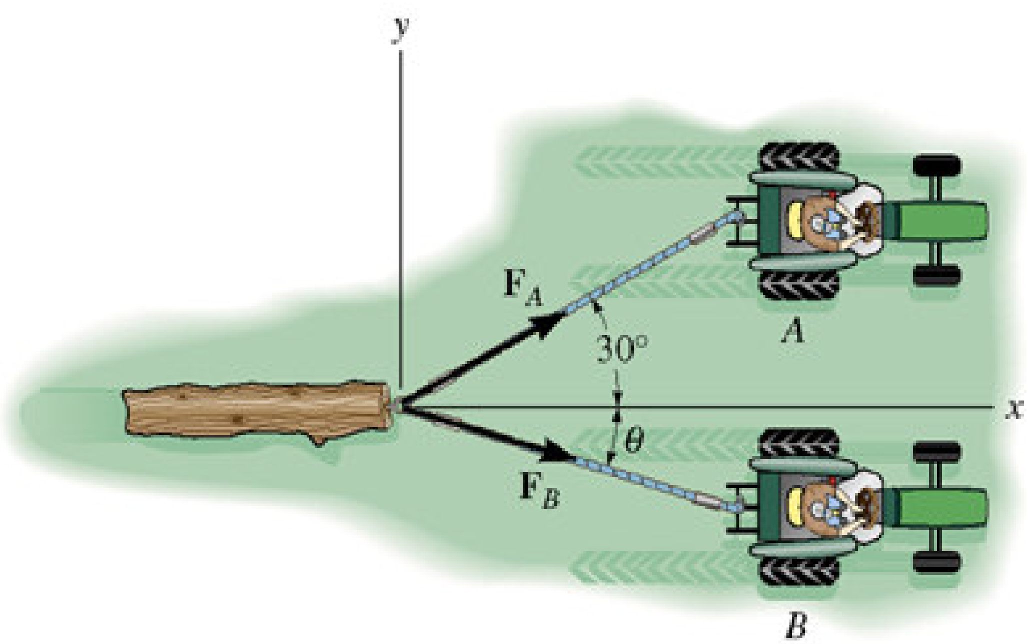
- 6) O parafuso tipo gancho mostrado na figura está sujeito a duas forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$. Determine o módulo e a direção da força resultante.



(a)

Exercícios Propostos

- 7) A tora de madeira é rebocada pelos dois tratores mostrados, sabendo-se que a força resultante é igual a 10kN e está orientada ao longo do eixo *x* positivo, determine a intensidade das forças F_A e F_B.
- Considere $\theta = 15º$.



Próxima Aula

- Sistemas de Forças Coplanares.
- Determinação de Força Resultante.
- Componentes de um Vetor Cartesiano.