

INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
SÃO PAULO

# Mecânica Técnica

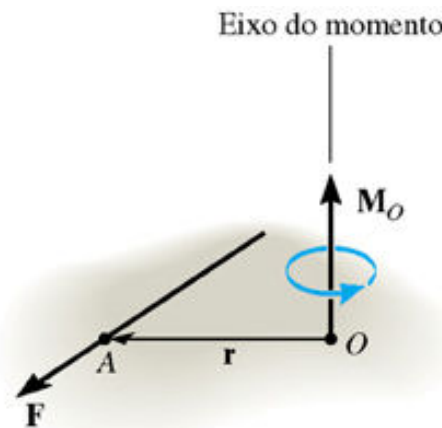
## Aula 11 – Momento de uma Força, Formulação Vetorial

# Tópicos Abordados Nesta Aula

- Regras do Produto Vetorial.
- Princípio dos Momentos.
- Momento em Sistemas Tridimensionais.

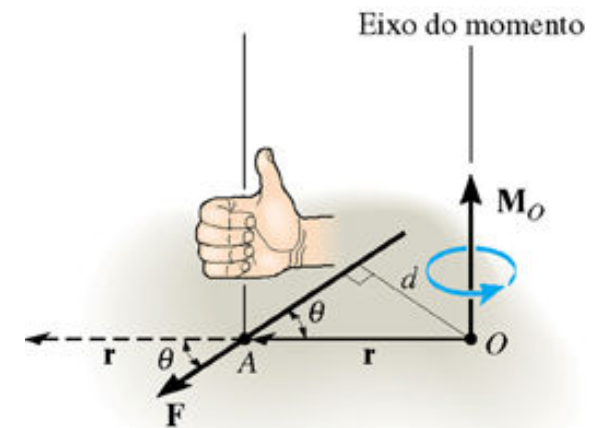
## Momento de uma Força – Análise Vetorial

- O momento de uma força em relação a um ponto pode ser determinado através da aplicação das regras de produto vetorial.
- A regra do produto vetorial para o cálculo de momentos geralmente é aplicada para sistemas em três dimensões.



(a)

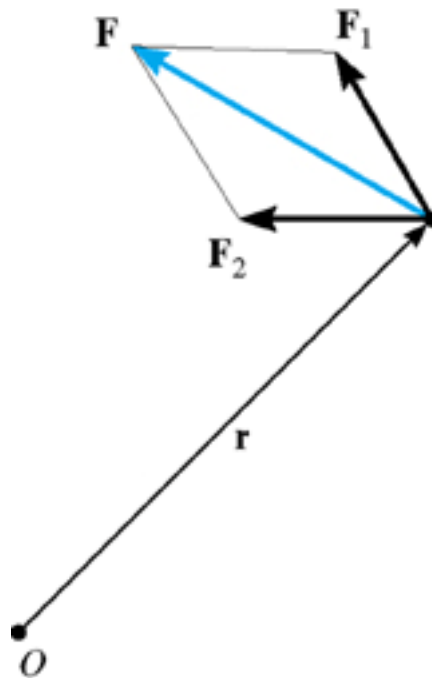
$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$



(b)

# Princípio dos Momentos

- Conhecido como teorema de Varignon.
- O teorema estabelece que o momento de uma força em relação a um ponto é igual a soma dos momentos dos componentes das forças em relação ao mesmo ponto.

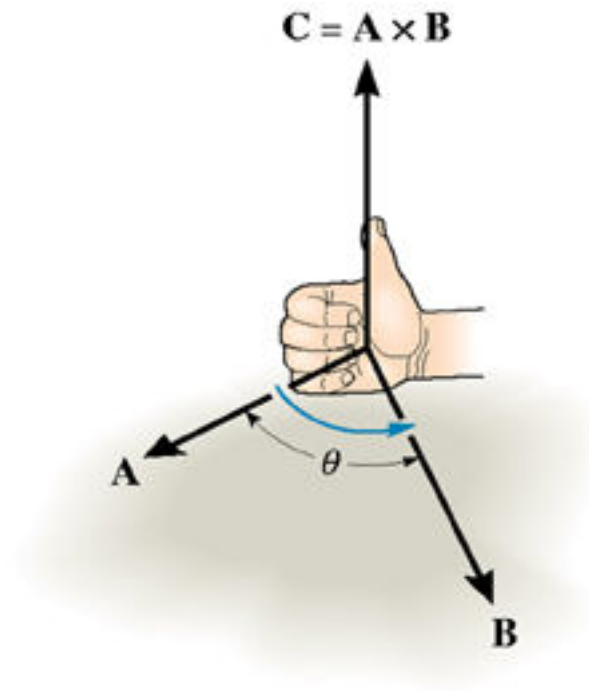


$$\vec{M}_O = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2)$$

# Regras do Produto Vetorial

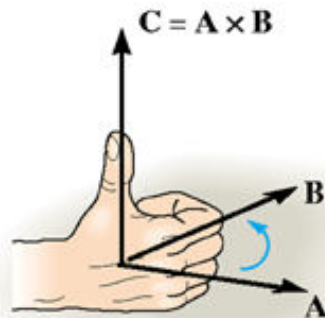
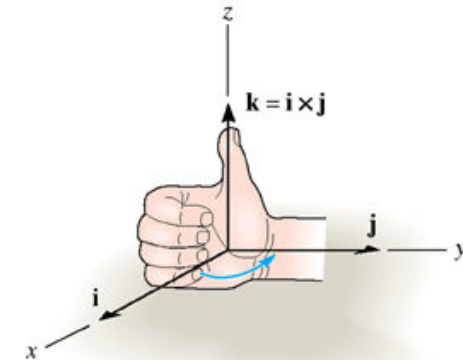
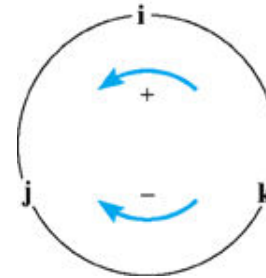
- O produto vetorial de dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  produz o vetor  $\mathbf{C}$  e matematicamente a operação é escrita do seguinte modo:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

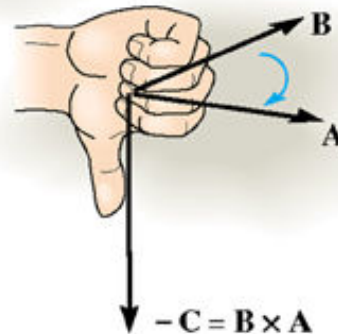


# Formulação Vetorial Cartesiana

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$	$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$	$\vec{i} \times \vec{i} = 0$
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$	$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$	$\vec{j} \times \vec{j} = 0$
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$	$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$	$\vec{k} \times \vec{k} = 0$



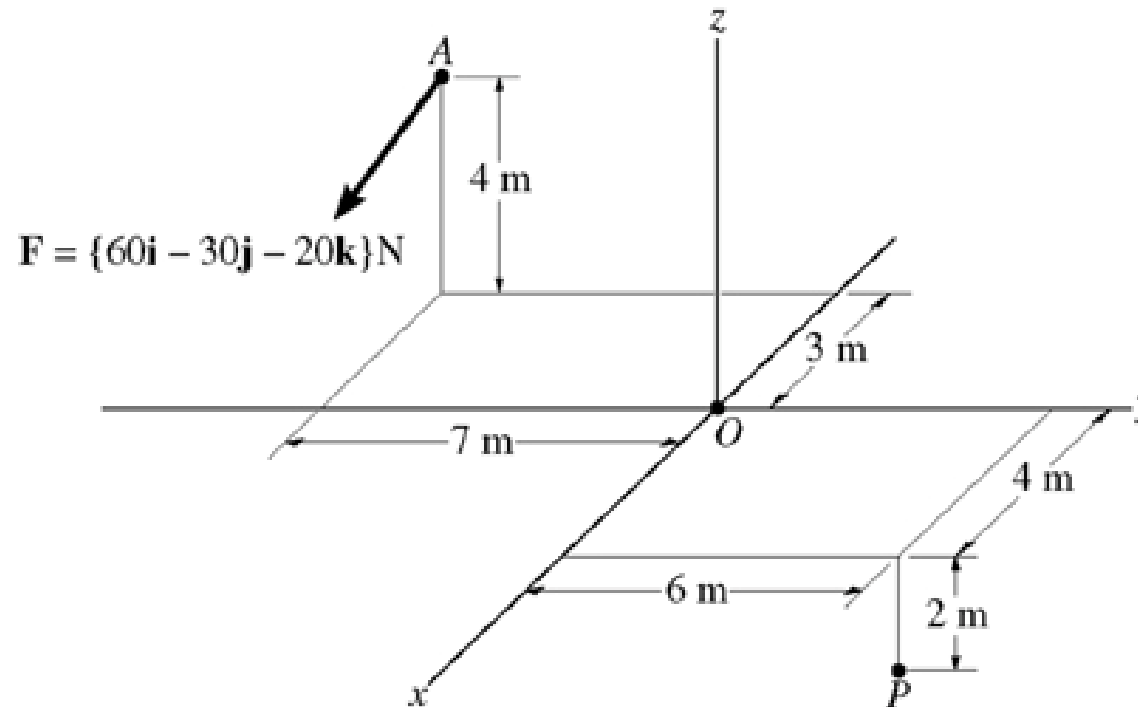
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



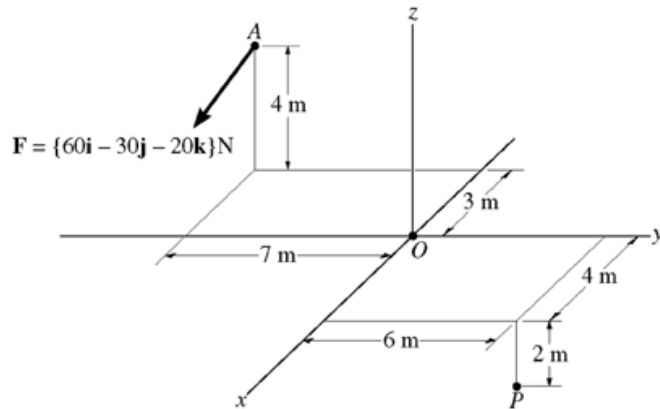
$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

# Exercício 1

- 1) Determine o momento da força  $F$  em relação ao ponto  $O$ . Expresse o resultado como um vetor cartesiano.



# Solução do Exercício 1



Cálculo do Momento no Ponto A:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = 90\vec{k} - 60\vec{j} + 420\vec{k} + 140\vec{i} + 240\vec{j} + 120\vec{i}$$

$$\vec{M}_O = (-3\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k}) \times (60\vec{i} - 30\vec{j} - 20\vec{k})$$

$$\vec{M}_O = 260\vec{i} + 180\vec{j} + 510\vec{k} \text{ Nm}$$

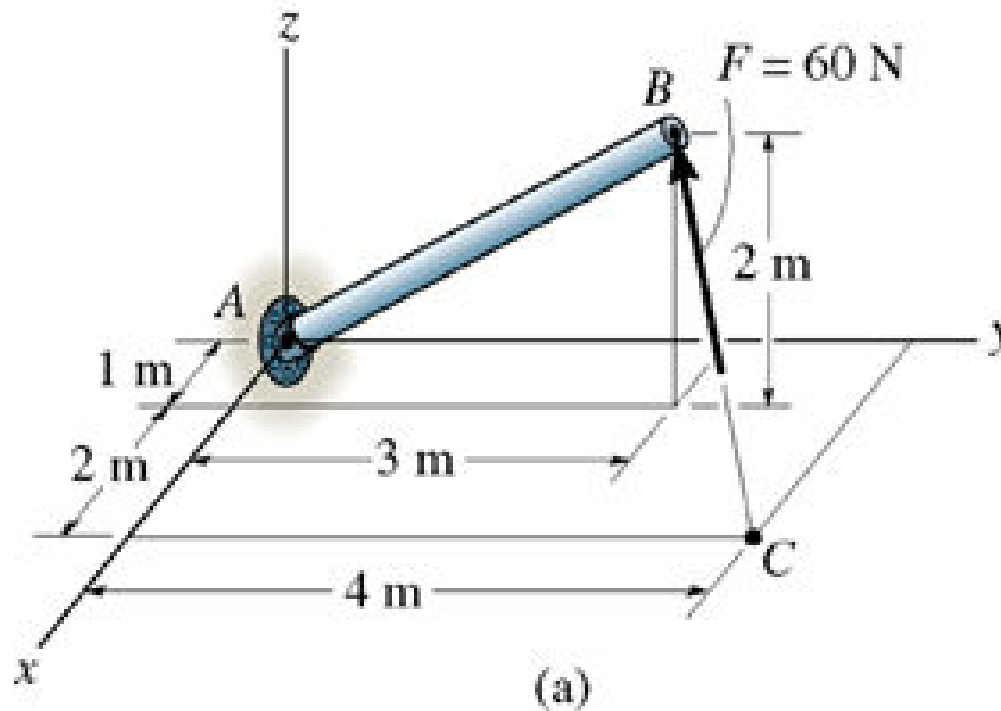
Vetor Posição:

$$\vec{r}_{OA} = -3\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}$$

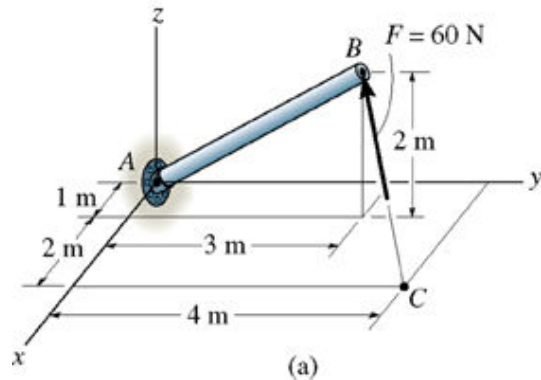


## Exercício 2

- 2) O poste mostrado está sujeito a uma força de 60N na direção de C para B. Determine a intensidade do momento criado por essa força em relação ao suporte no ponto A.



# Solução do Exercício 2



Vetores Posição:

$$\vec{r}_{AB} = 1\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}$$

$$\vec{r}_{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{r}_{CB} = (1-3)\vec{i} + (3-4)\vec{j} + (2-0)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{CB} = -2\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{CB} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \quad \rightarrow \quad r_{CB} = 3 \text{ m}$$



Vetor Unitário:

$$\vec{u}_{CB} = \frac{-2\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

$$\vec{u}_{CB} = -0,666\vec{i} - 0,333\vec{j} + 0,666\vec{k}$$

Vetor Força:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{CB}$$

$$\vec{F} = 60 \cdot (-0,666\vec{i} - 0,333\vec{j} + 0,666\vec{k})$$

$$\vec{F} = (-40\vec{i} - 20\vec{j} + 40\vec{k}) \text{ N}$$

Cálculo do Momento no Ponto A:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_A = (1\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \times (-40\vec{i} - 20\vec{j} + 40\vec{k})$$

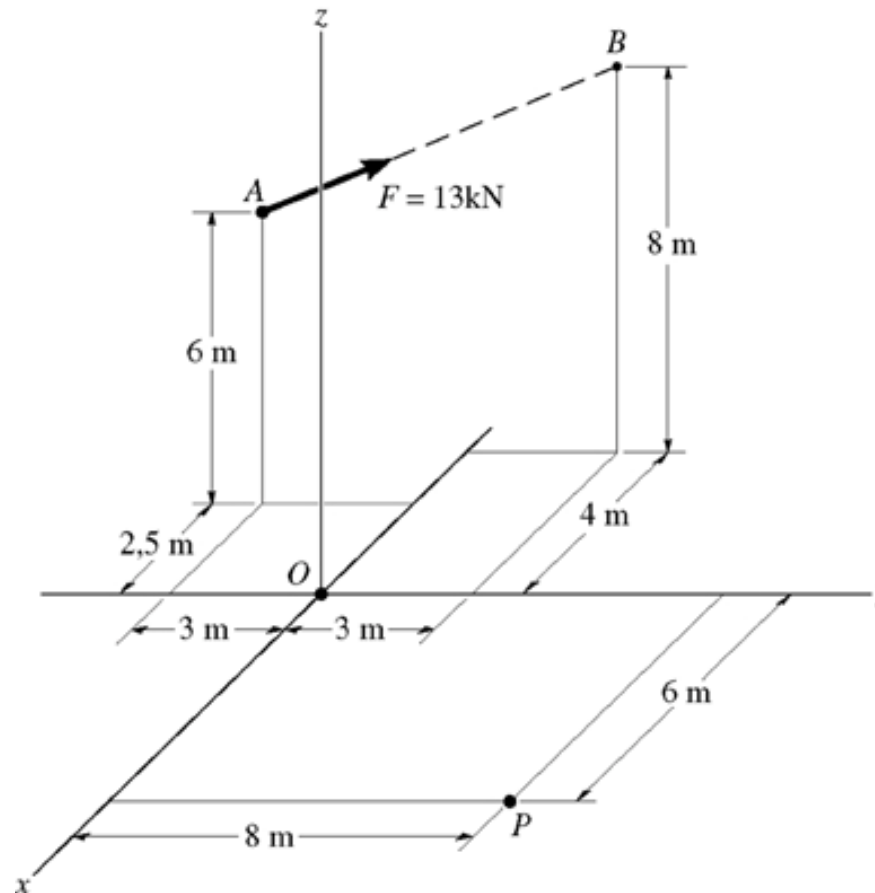
$$\vec{M}_A = -20\vec{k} - 40\vec{j} + 120\vec{k} + 120\vec{i} - 80\vec{j} + 40\vec{i}$$

$$\vec{M}_A = 160\vec{i} - 120\vec{j} + 100\vec{k} \text{ Nm}$$

$$M_A = \sqrt{160^2 + 120^2 + 100^2} \quad \rightarrow \quad M_A = 224 \text{ Nm}$$

# Exercícios Propostos

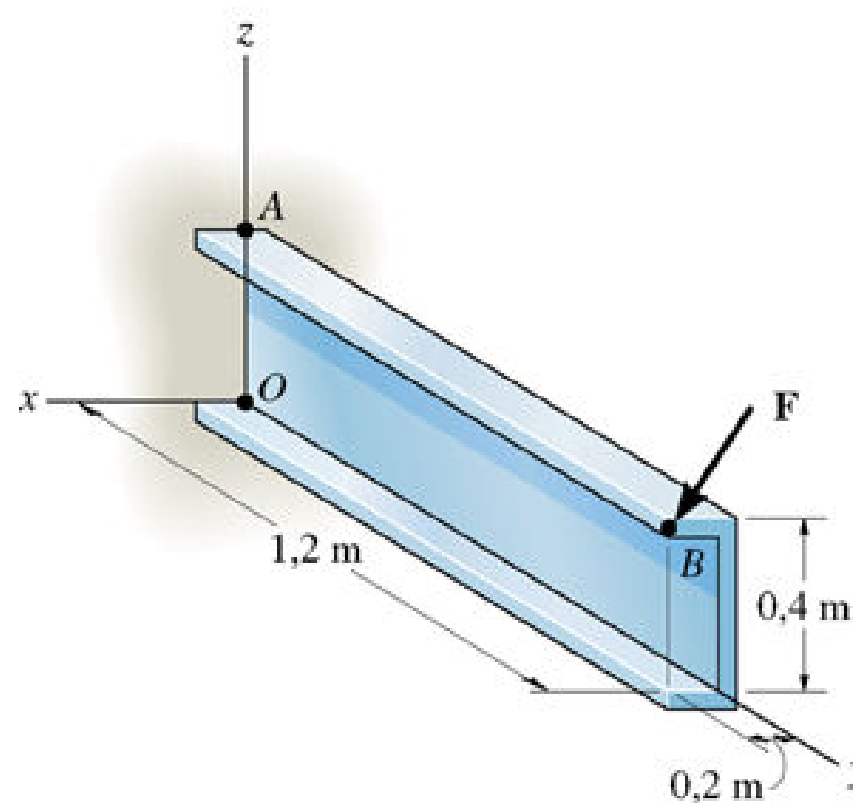
- 1) Determine o momento da força  $F$  em relação ao ponto  $O$ . Expresse o resultado como um vetor cartesiano.





# Exercícios Propostos

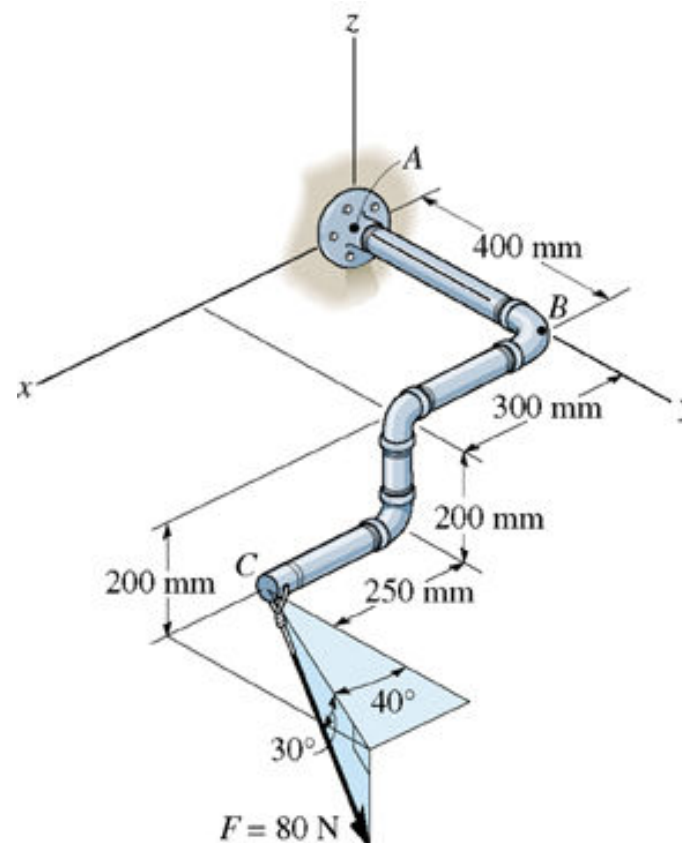
- 3) A força  $\vec{F} = (600\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k})$  N, atua na extremidade da viga. Determine o momento dessa força em relação ao ponto A.



# Exercícios Propostos

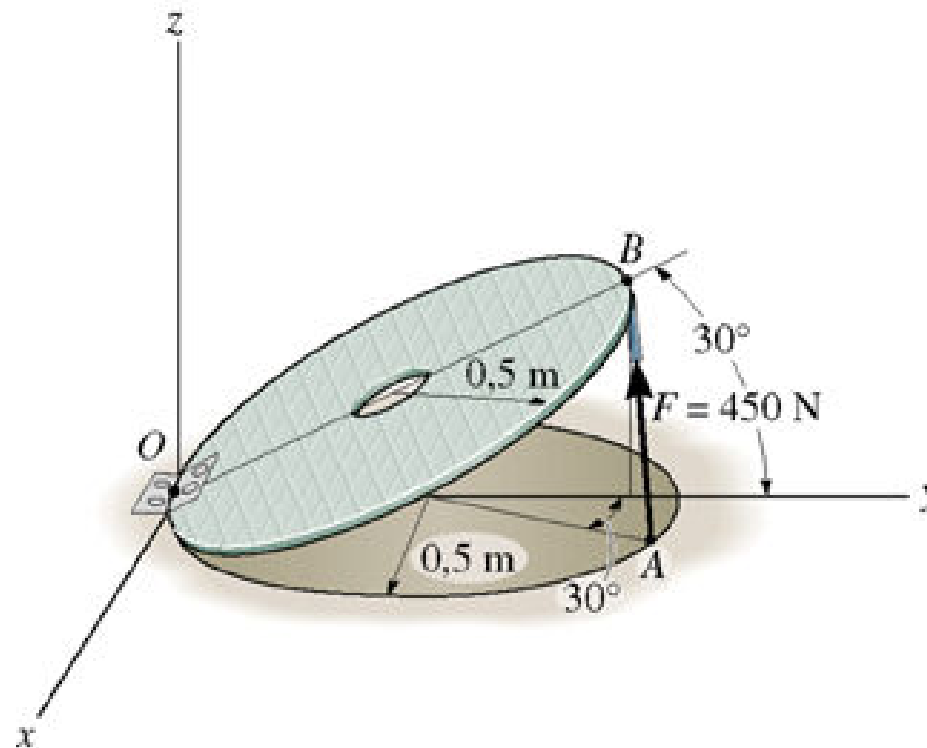
- 4) A estrutura mostrada na figura está sujeita a uma força de 80N.

Determine o momento dessa força em relação ao ponto A.



# Exercícios Propostos

- 5) A escora  $AB$  de uma comporta de 1m de diâmetro exerce uma força de 450N no ponto  $B$ . Determine o momento dessa força em relação ao ponto  $O$ .



# Próxima Aula

- Momento em Relação a um Eixo Específico.
- Momento de um Binário.